

PERIODICA POLYTECHNICA

ELECTRICAL ENGINEERING — ELEKTROTECHNIK

VOL. 3 * NO. 3 * 1959



POLYTECHNICAL UNIVERSITY
TECHNISCHE UNIVERSITÄT
BUDAPEST

PERIODICA POLYTECHNICA

Contributions to international technical sciences published by the Polytechnical University, Budapest (Hungary)

Originalbeiträge zur internationalen technischen Wissenschaft, veröffentlicht von der Technischen Universität, Budapest (Ungarn)

PERIODICA POLYTECHNICA

includes the following series

enthält folgende Serien

Engineering
Electrical Engineering
including Applied Physics
Chemical Engineering

Maschinen- und Bauwesen
Elektrotechnik und angewandte Physik
Chemisches Ingenieurwesen

The issues of each series appear at quarterly intervals

Einzelnummern der genannten Serien erscheinen vierteljährlich

CHAIRMAN OF THE EDITORIAL BOARD — HAUPTSCHRIFTLEITER

Z. CSÜRÖS

EDITORIAL BOARD — SCHRIFTLEITUNG

**I. BARTA, O. BENEDIKT, S. BORBÉLY, T. ELEK, L. GILLEMOT, P. GOMBÁS,
L. HELLER, J. PROSZT, E. REUSS, G. SCHAY, I. VÖRÖS**

EXECUTIVE EDITOR — SCHRIFTLEITER

J. KLÁR

The rate of subscription to a series is \$ 4,00 a year. For subscription or exchange copies please write to

Jahresabonnement pro Serie: \$ 4,00. Bestellungen und Anträge für Tauschverbindungen sind zu richten an:

PERIODICA POLYTECHNICA

BUDAPEST 62, POB 440

CONSIDERATIONS REGARDING THE POSSIBLE USE OF SOME OPTICAL ELEMENTS

By

N. BÁRÁNY

Institute for Instrumental Design and Precision Mechanics
of the Polytechnical University, Budapest

(Received March 28, 1958)

Considering the development of optomechanical instruments, that is, optical and precision instruments, one finds that the use of optical elements are noticeably divergent for surveying, astronomical, controlling and measuring instruments, and, finally, for military instruments. A comparison of the instruments belonging to the first large group to the military instruments reveals that the elements used in the latter are not too widely applied there. The difference between the two groups is due not so much to theoretical reasons as to their respective construction and arrangement. The design of military instruments, in particular, is subject to special requirements as regards accuracy under difficult climatic and atmospheric conditions, as well as possible chemical or mechanical influences. It is a fact that instruments belonging into the first group are subjected to milder conditions and with the exception of geodetic instruments, they are generally used indoor in air-conditioned rooms. In addition, the consideration of the use of optomechanical elements shows that some such elements which have a satisfactory record of long standing, are but occasionally used in optomechanical instruments. Let here be mentioned the well-proved, permanent design and construction of the penta-mirrors, compensators, various types of mounts, prism arrangements, etc. The penta-mirror, for example, having a fifty-years-old mount, still firmly holds its ground, so that actually there is no need of further developing this element. The designer of optomechanical instruments may safely rely upon these elements in his work, whereas the designer of military instruments has to summons all his knowledge and inventiveness for effectively counteracting the difficult conditions referred to above. As a result, many of these instruments are surprising and ingenious in their design. In the course of time, the designers of optomechanical instruments have come to realize the benefits to be gained by making use of the experiences arrived at in connection with military instruments. Since military instruments and their components are but rarely described in literature, it often happens that the designers of optomechanical instruments employ certain elements as independent constructions, unaware of their origin, while in other quarters the same arrangements are considered as all but obsolete.

This refers to astrological instruments as well, a group which, owing to its special function, is also somewhat isolated from other optomechanical equipment.

The present paper deals with certain arrangements which have long been widely used in military instruments, and which might be employed to great advantage in optomechanics, too. Let us first consider the device for adjusting interocular distances in binocular instruments.

Neither prism binoculars (rotatable about a common axis) nor microscopes will be treated in this paper, except for remarking that in the case of binocular microscopes interocular distance is adjusted by rotating the tube,

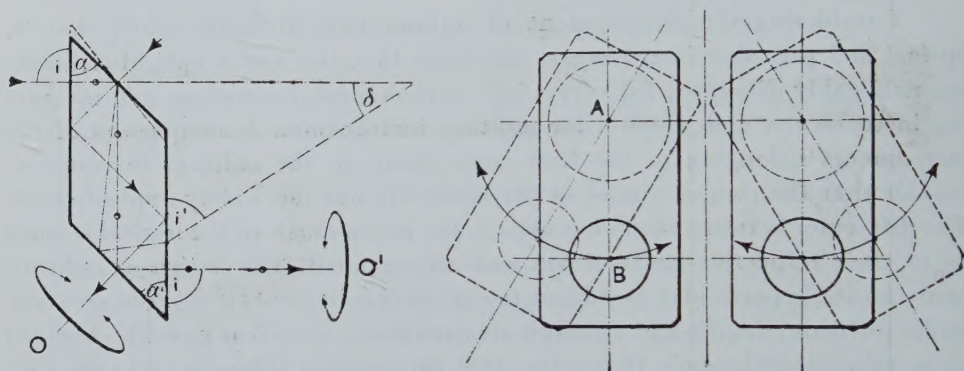


Fig. 1. Rotation of a rhombic prism about the axes normal to the planes of incidence

which contains a Porro prism arrangement, together with the eyepiece, whereas in binocular telescopes it is more usual to rotate the eyepiece in relation to the fixed tube. In every case, however, that condition must be satisfied, that the axes of the parallel bundles emerging from the eyepiece shall remain parallel during adjustment, and shall coincide with the optical axis of the viewer's eye. In the case of binocular telescopes with large exit pupils this rule may be modified in such a way that adjustment is also considered satisfactory if the exit pupil of the binocular instrument entirely covers the pupil of the human eye. Obviously, the spatial position of a binocular instrument's optical axes is also influenced by the tolerance values, not as yet established on an international level, hence, a certain lack of uniformity among the various products should be taken into account. In addition to the precise mechanical control of the instruments, the angular error of the built-in prisms also plays a certain role, so that the required accuracy of the instrument is to be set in conformity with its purpose [1].

The most widely used means for adjusting the interocular distance are rhombic prisms rotated in relation to each other (Fig. 1). When such prisms

are swung about the optical axis O or O' which is normal to the plane of incidence, the position of the image is not changed. If the equation $a = a_1$ is observed for the prism, no deviation will occur. When the two receiving planes are not parallel to the plane of the drawing, they make an angle δ to each other. This holds true only for rays travelling in the plane of the drawing, that is, in the principal section of the prism, whereas the behaviour of the oblique spatial rays is more complicated and can be computed by analytical methods only. Obviously, even the prisms of the required angle must be mounted and

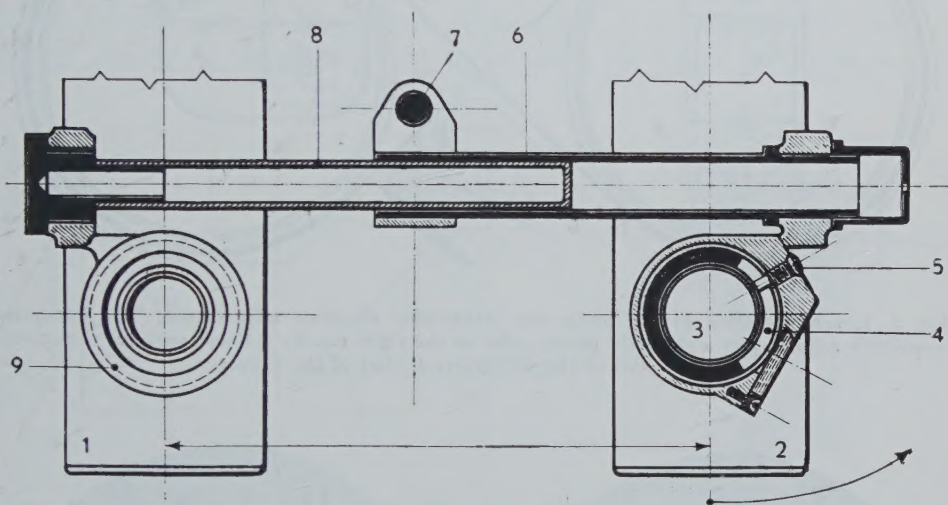


Fig. 2. Lever-controlled device for interocular distance adjustment

controlled in a manner which ensures the mechanical axis of the mount coincide with the optical axis of the prism, and, ultimately, that there should be no undue slackness. When the interocular distance is within the range of 58 to 72 mm, the angular displacement of the individual prisms is not great. In instruments provided with telemeters another requirement has to be observed: the cross hairs must not be displaced during the adjustment of the eyepiece.

Fig. 2 represents a commonly used construction in which pin 8 fixed to ring 9 mounted on the eyepiece tube of telescope 1 is displaced in a guiding sleeve 6 during adjustment. Acting as a single arm lever, it turns ring 4, loosely fitted on the eyepiece tube of telescope 2 which in turn makes the pin-ended screw 5 extending into the mount of the cross hairs and rotate them in relation to the telescope. As a result, the cross hairs remain in the adjusted position. Screw 7 serves for fixing the telescope after adjustment.

The control illustrated in Fig. 3 is similar to the one above described, in which the eyepieces, together with the tube, are swung about the axis outside the plane of the drawing; in the arrangement of Fig. 3 rhombic prisms are used

for adjusting the eyepieces in relation to the fixed telescope tube. The objective image lying in the plane of the telemeter may be situated in the vicinity of the prism's plane of incidence or of emergence, requiring short or long focal dis-

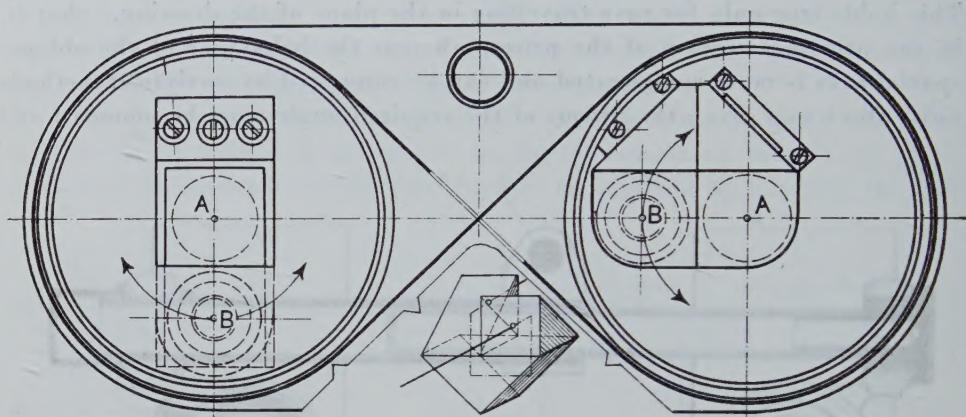


Fig. 3. Lever-controlled prism device for interocular distance adjustment. The left-hand eyepiece is adjusted by a rhombic prism, that of the right e.g. by a Porro system. *A* denotes the optical axis of the objective, *B* that of the eyepiece

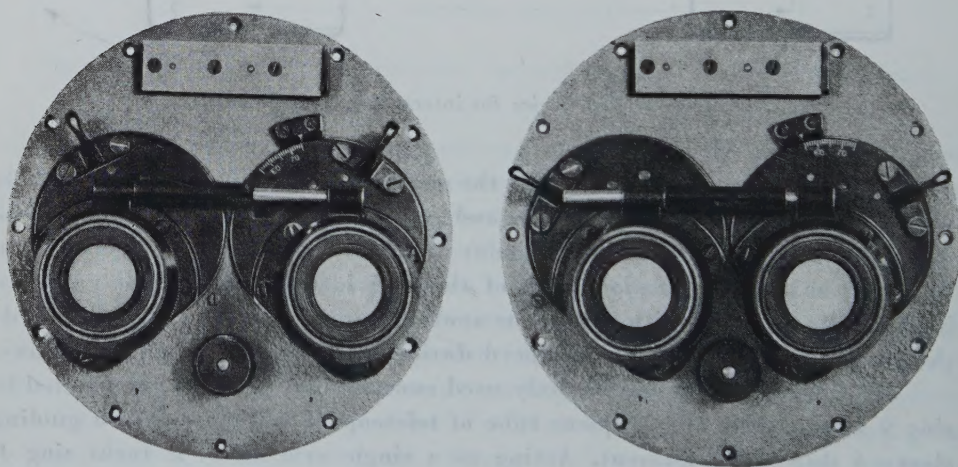


Fig. 4. The control mechanism of Fig. 3, with the eyepieces in extreme position

tances, respectively, for the eyepieces. The prism mounts are rotated either by means of meshing racks fixed on the disc-shaped part, or on an endless loop-shaped steel band. The position of the cross hairs is secured by the gear mechanism shown in Fig. 2, with the extreme positions represented in Fig. 4. In this

case the axes of the eyepieces describe an arc, since the prisms swing about an axis normal to their planes of incidence. The rhombic prism displaced in the direction of the optical axis located in the main section (Fig. 5) does not lead to vertical errors, for the axis of the bundle emerging from the prism maintains its direction even if displaced. The displacement, however, conveys point A of the optical axis, which is symmetrical to the plane of incidence, to A' , whereby the bundle ceases to be symmetrical. Thus, a certain portion of the marginal bundles may be eliminated, a phenomenon likely to occur with prisms having optimal dimensions. If, however, a rectangular 45° prism is shifted parallel to the plane of the hypotenuse, the image will be displaced.

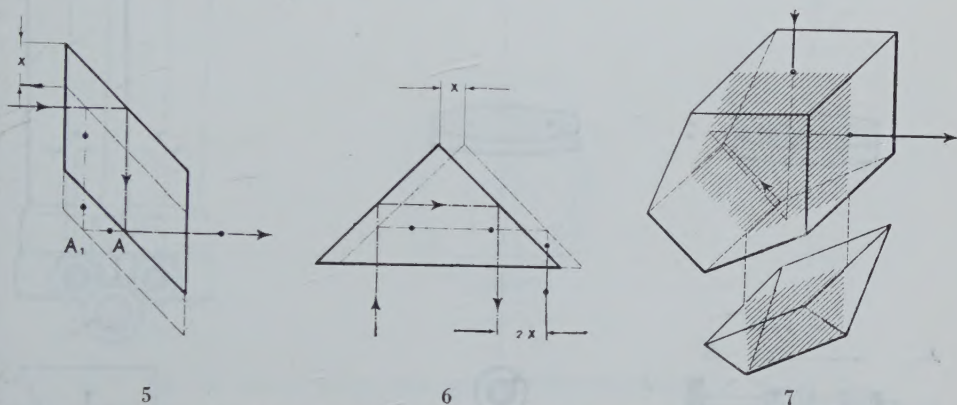


Fig. 5. When the rhombic prism is shifted in the direction of the main section, no vertical error, but possibly vignetting occurs

Fig. 6. Travelling of the optical axis with the displacement of the 45° rectangular prism

Fig. 7. Design of the penta roof edge prism

The principle of this latter arrangement has long been known, and has been applied for adjusting Porro telescopes. In order to eliminate the vertical error (Fig. 6), the prism in its mount is shifted by amount x , whereupon the axis of the emerging bundle suffers a displacement of $2x$ in relation to the original ray.

After these preliminaries we shall now treat an angle telescope provided with a penta roof prism, in which the adjustment of the interocular distance is effected by displacing one of the prisms in the direction normal to the optical axis. The roof surface of the penta prism may be replaced by a rectangular 45° prism, the main section of which is normal to the main section of the prism (Fig. 7). Hence, a displacement in a direction normal to the main section will give rise to the phenomena illustrated in Fig. 6. The reflecting surfaces of the roof edge give an angle of 90° , and the axis of the incident bundle passes through the edge formed by the roof faces, thus, the axis of the bundle and the roof

edge have to fall in the same plane. The angle made by the roof faces must be precisely 90° , as first a portion of the bundle is reflected by the first mirrored face, while another portion is reflected by the second mirrored face, so that the angle made with the incident rays must not be modified after being reflected

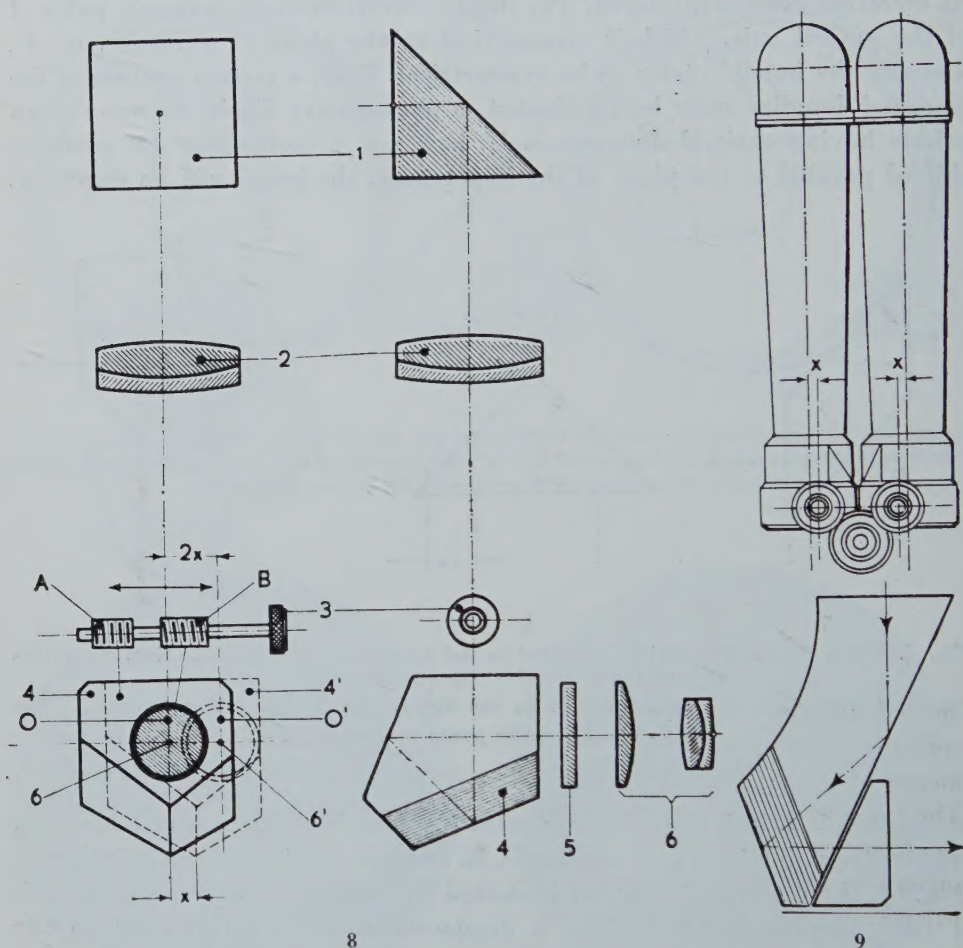


Fig. 8. Path of rays and image erection in penta roof prism binocular telescopes. Adjustment of interocular distance by means of displacing eyepiece and prism with a differential screw

Fig. 9. Angle telescope with eccentrically disposed roof prism

twice, not even if the order is reversed. In the binocular telescope diagrammed in Fig. 8, the image made with the objective (2) and reversed in the horizontal plane through 90° by the rectangular 45° head prism (1) is erected in the image plane by the penta roof prism (4). The axis (0) of the objective is precisely adjusted to the roof edge, at the internationally accepted 65 mm interocular distance, with the telescope adjusted to infinity. When, during the adjustment

of the interocular distance, the prism is displaced in the direction of the arrow (6'), that is, normal to the main section, then the axis emerging from the prism (Fig. 2) is displacing twice the amount of the prism itself, so that an inconvenient double image is produced. To remove this, the eyepiece is displaced — in our example by means of a differential screw (*A* and *B*) — at twice the velocity as the prism is (System Goerz).

The same principle has since long been applied by Messrs Zeiss, although not for the adjustment of the interocular distance. In the 12 by 50 binocular telescope derived from 1911 (Fig. 9) it was impossible, for constructional reasons, to adjust the axes of the eyepieces to the smallest accepted interocular distance, thus, they were approximated by $2x$ each, calculated from the vertical

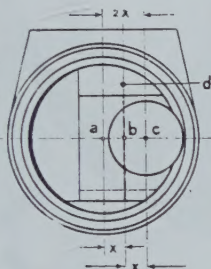


Fig. 10. Effect of the roof prism on the angle telescope of Fig. 9

optical axis of the telescope. Hence, the axes of the eyepieces no longer coincided with the axis of the instrument. Image erection was effected by means of the roof prism system represented at the lower part of the figure. The front view (Fig. 10) shows that the axis *a* of the eyepiece is at a distance $2x$ from the optical axis *c* of the instrument. In order to eliminate this inconvenience, the roof edge of the prism *d* is situated at point *b*, which is in the midpoint of the distances *a* and *c*.

Fig. 11 represents the perspective view of a gear mechanism of the Zeiss system, used for the alignment of the adjustable eyepieces. When lever 1 is shifted, the left-hand eyepiece, disposed eccentrically in relation to the right-hand fixed eyepiece, is displaced in alignment. Fig. 12 shows a rear view of the two extreme positions of the eyepiece. Upon the shifting of lever 1 disc 4 swings along with mount 5 and eyepiece 3, the mount being eccentrically disposed in the disc. In the meantime rack 6 fixed on disc 5 revolves on the fixed rack 8. The motion resulting therefrom, and from the rotation of the eccentric disc, shifts the eyepiece in alignment. Ring 9 bearing a slot serves against over-rotation in the two extreme positions of the eyepiece.

Binocular telescopes are usually provided with exchangeable colour filters. The simplest way of changing the filters is by pushing them onto the eyecup of the eyepiece, but it is generally preferred to use built-in filter chang-

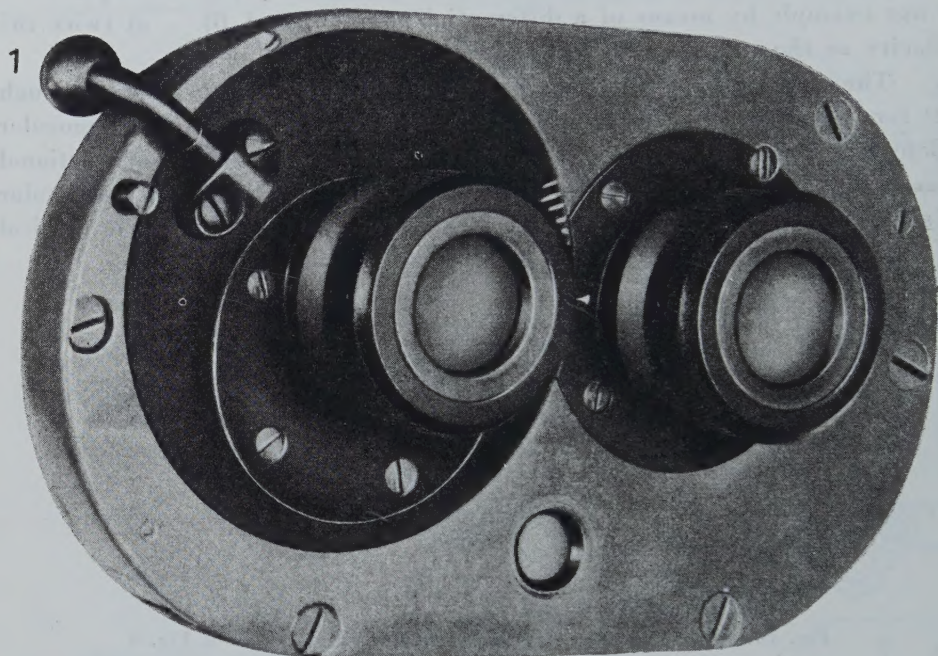


Fig. 11. Adjustment of interocular distance, with rack-and-pinion control and eccentrically disposed eyepieces

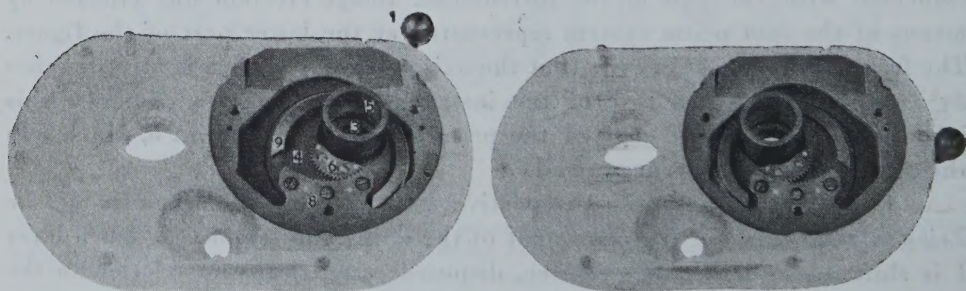


Fig. 12. Rear view of the eyepiece control of Fig. 11, with the eyepieces in extreme position

ing devices of the revolving disc, drum or sliding type. All these solutions require a certain amount of space, so that when there is little available space, one has to resort to other solutions. By chance we became acquainted with a binocular telescope provided with an unusually ingenious device for chang-

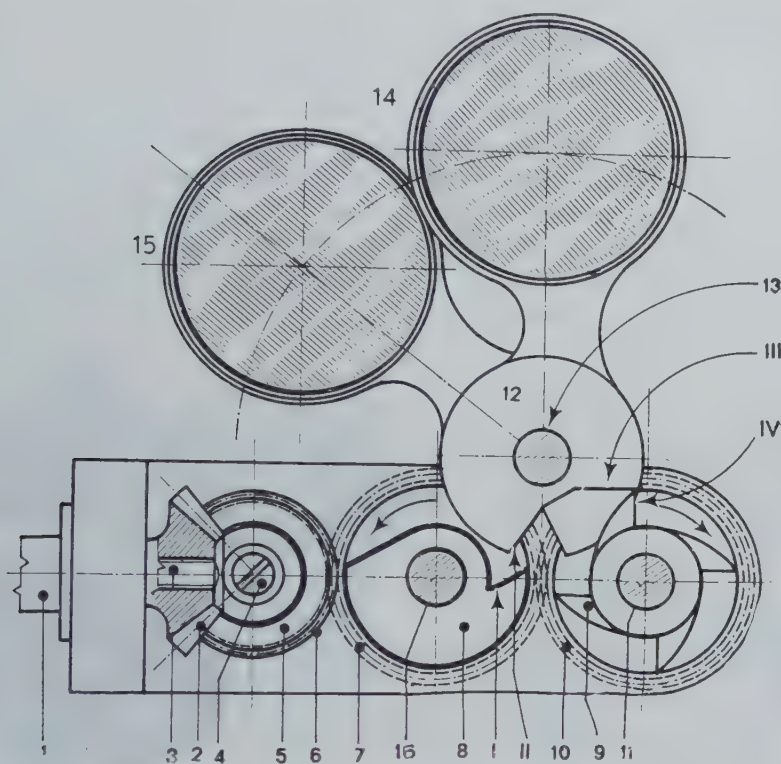


Fig. 13. Top view of a swinging colour filter changing device

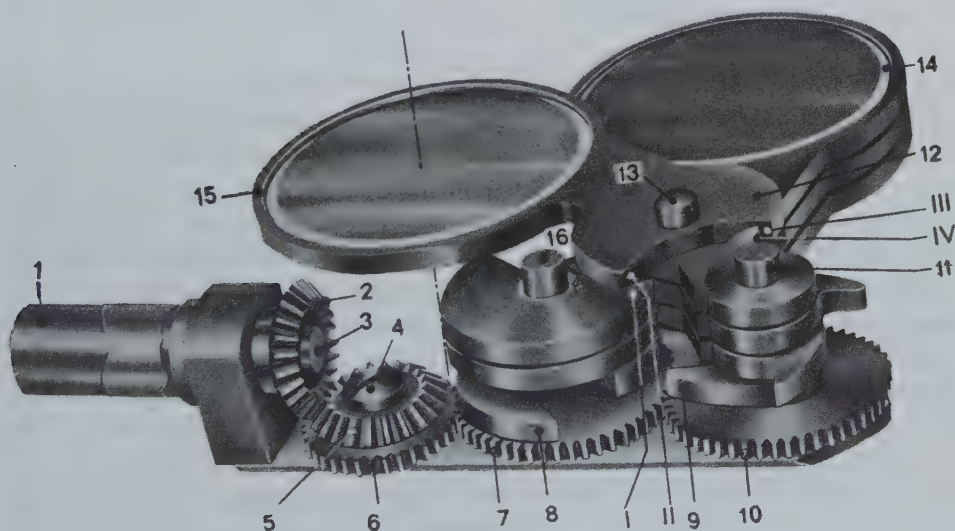


Fig. 14. Perspective view of a swinging colour filter changing device

ing the colour filters (Figs. 13 and 14). The origin of the instrument could not be ascertained as it was found in a badly damaged condition.

The four filter arms, situated one below the other, are free to rotate about pivot 13 through a certain angle. In the position represented filter 15 is in the optical axis of the telescope. The bevel gear mounted on pivot 3 driven by axle pin 1 rotates spur gear 6 about pivot 4 by means of bevel gear 5. Spur gear 6 takes along gear 7 as well as spur gear 10 which has a similar diameter. The series of superposed cam-discs 8, mutually displaced through a certain angle, swing about pivot 16 along with gear 7. The clawed discs 9, also situated one below the other and mutually displaced, similarly swing about

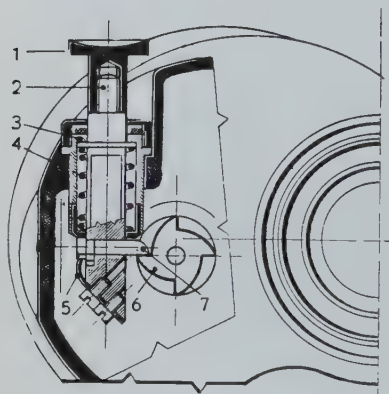


Fig. 15. Push-button colour filter changing device for prism binoculars

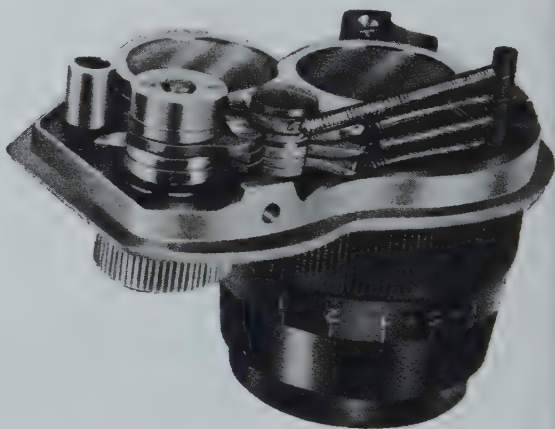


Fig. 16. Swinging colour filter changing device for prism binoculars

pivot 11 along with spur gear 10. One of the clawed discs turns the filter arm into the optical axis, while the other secures the arm in its final position. When the filter enters the optical axis, cam-disc 8 and claw 9, respectively, support filter arm 15 swinging about pivot 13. When the filter arm is placed into position by one of the cams 8, the edge of the claw 9 revolves on the plane surface III of arm 12. Upon further rotation, the top cam will only just touch face II of arm 12 by top cam I. Simultaneously, the top one among the cams 9 is just about to leave the face III of arm 12 with its claw 4. In this position filter 12 is still fixed. During rotation, however, the cams and claws swing on in such a manner that only one filter at a time is swung into the optical path. When rotation is continuous, the filters alternately enter or leave the optical axis.

This equipment may be well-adapted for using in prism binoculars. The colour filters conventionally used for small prism binoculars are slid onto the eyepieces, a procedure which is very inconvenient when rapid changes are required, and may result in the loss of the filters. When more extensive obser-

vation is involved, together with the necessity of various colour filters, it is advisable to incorporate a mechanism of this type into the instrument (see Fig. 15).

In this construction, the return of the filters is effected by the action of springs. Instead of using a revolving knob, adjustment is done by means of a push button. When pressing the button in alignment, pin 7 mounted on the end of rod 2 disposed in sleeve 3 imparts a jerk-like turn to wheel 6. The wheel is secured in any desired position by laminated spring 5, and a coiled spring 4 pushes the button back into starting position. Fig. 16 illustrates another construction, also for prism binoculars. In this case adjustment is carried out from the outside, by means of a revolving knob.

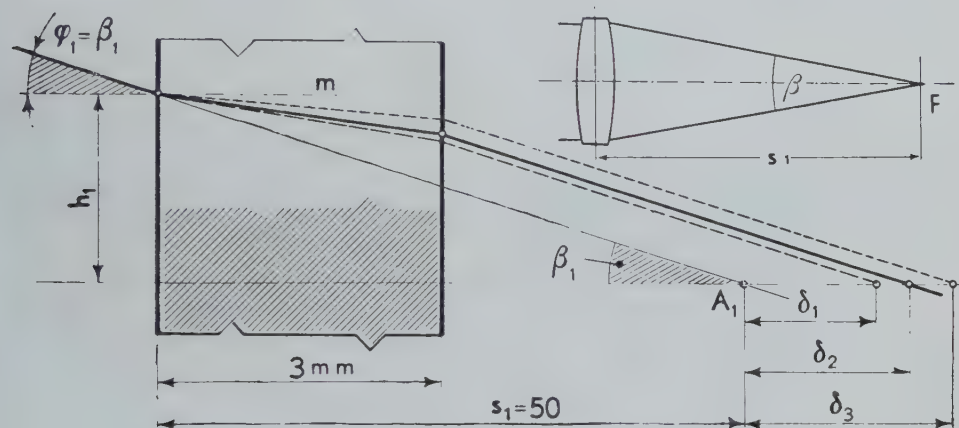


Fig. 17. The path of rays in an optical plate

In the case of a telescope adjusted to infinity, filters disposed in front of or behind the eyepiece have no optical effect, apart from astigmatism, provided that the filters are strictly plano-parallel. When the filters are placed so as to intersect a diverging or converging bundle, the image will be shifted backwards from the plane of the field of view — depending on the thickness and the refractory index of the glass — for the filter will add to the length of the path of rays. Therefore, after the removal of the filters, a neutral optical plate has to be inserted into the path of rays, so as to maintain the image section of distance at the same value as did the filters. The role played by the thickness and the refractory index stresses the importance of considering these factors in the choice of filters, with reference to the following numerical examples (Fig. 17).

Lens 1 forms the image of an object at infinity in the focal plane F . Let $s = 100\text{ mm}$ and $\beta = +45^\circ$. When filter plates of 3 mm thickness, made from glasses having different refractory indices, are inserted before the image

plane at $s_1 = 50$ mm, the image plane F will be displaced by value

$$\delta = \frac{n-1}{n} d$$

The data of the three types of glasses used in the example are

FK3	BK7	SF6
$n_D = 1,464\ 50$	$n_D = 1,516\ 33$	$n_D = 1,805\ 18$

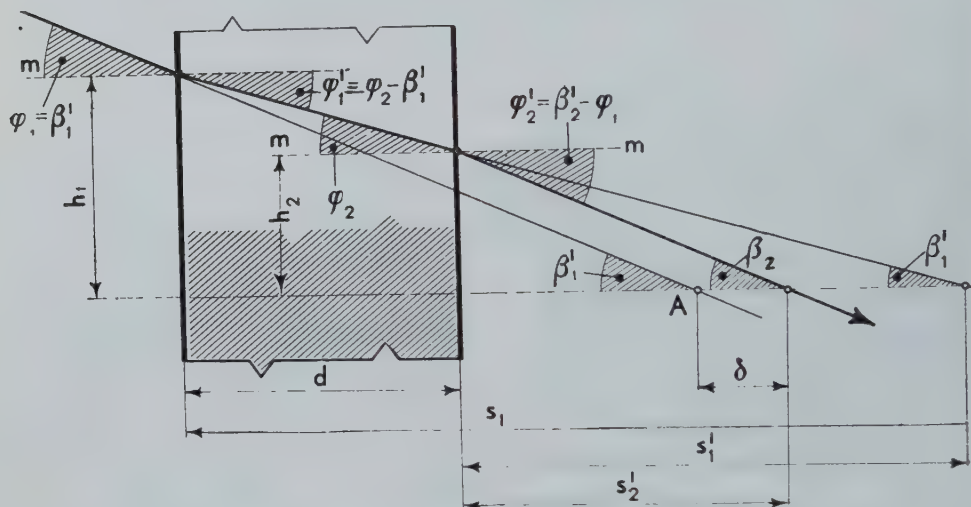


Fig. 18. The effect of the filter's thickness depending on the refractive index

The amount of displacement is

$$\delta_1 = 0,951\ 5$$

$$\delta_2 = 1,021\ 5$$

$$\delta_3 = 1,338\ 1$$

respectively. If it is desirable to produce the same amount of displacement for each filter, for instance δ_2 , the thickness of the other two optical plates has to be varied. When

$$d_1 = \frac{n \cdot \delta_2}{n - 1} = 3$$

for the BK7 glass, then

$$d = 3,22$$

$$d_2 = 2,29$$

(Fig. 18). The following table indicates the course of the ray, calculated for modified thicknesses.

s_1	FK3 50	BK7 50	SF6 50
$\varphi_1 = \beta' = \beta_2$	= 5°	5°	5°
$\text{tg } \beta'$	= 0,0874 887	0,0874 887	0,0874 887
$h_1 = s_1 \cdot \text{tg } \beta'$	= 4,3744 35	4,3744 35	0,3744 35
$\sin \varphi_1 = \sin \varphi'_2$	0,0871 557	0,0871 557	0,0871 557
$\sin \varphi'_1 = \frac{\sin \varphi}{m} = \sin \varphi_2$	0,0595 122	0,0574 780	0,0482 809
$\varphi'_1 =$	= 3°24'42,53''	3°17'42,24''	2°46'02,52''
$\text{tg } \varphi'_1 = \text{tg } \beta'_1$	= 0,0596 179	0,0575 733	0,0483 372
$s'_1 = \frac{h_1}{\text{tg } \beta_1}$	= 73,3745 16	75,9802 72	90,4982 33
$-d$	= -3,22	-3	-2,29
$s_2 = s'_1 + [-d]$	= 70,1545 16	72,9802 72	88,2082 33
$h_2 = s_2 \cdot \text{tg } \beta_1$	= 4,1824 653	4,2017 151	4,2294 233
$s'_1 = \frac{h_2}{\text{tg } \beta_2}$	= 47,805 8	48,025 8	48,735 8
Glass thickness	3,22	3,00	2,29
$s'_2 + \delta$	= 51,0258	51,0258	51,0258
$s_1 + \delta = 50 + 1,0215$	= 51,0215		
$s'_2 + \delta$	= 51,0258		
the difference	0,0043		

If the calculation is made with even greater accuracy for the modified glass thickness, the deviation will be eliminated.

When there is very little space available, the colour filter changing device is arranged between the eyepiece and the exit pupil near to the eyepiece lens, so as not to inconvenience the observer's eye and to leave sufficient space for approaching the exit pupil. The construction is similar to the revolver objective widely applied in microscopes (Fig. 19). Colour filters 4 and 7 are mounted in a spherical calotte shaped disc 2, rotatable about screw 5 acting as a pivot. The disc swings about sleeve 10 fixed in head 3, instead of swinging directly

about the screw. The revolver arrangement is mounted on magnifying tube 8 machined in telescope 9. A cover 1 is screwed on to cover the mechanism. A slot 11 is cut into an appropriate place of the cover to allow the rotation of the filter.

Budapest, 25th April, 1959.

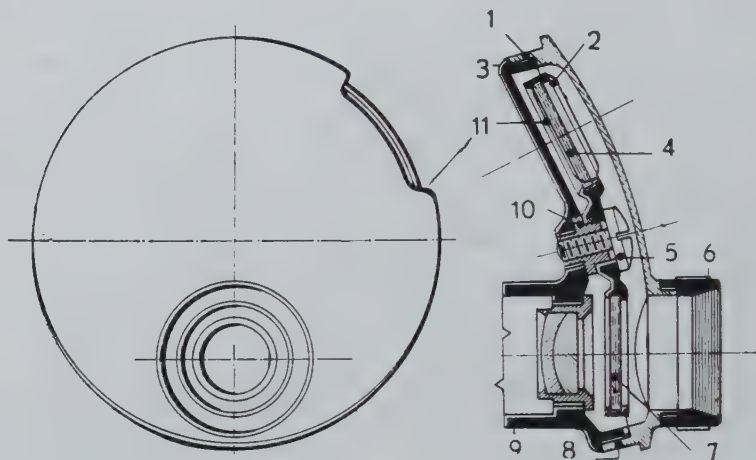


Fig. 19. Colour filter changing device disposed behind the eyepiece

Summary

The paper discloses a number of known adjusting devices well-adapted for using in optomechanical instruments. A few examples of interesting but unduly neglected control mechanisms are described, pointing out the possibility of their use in optical and precision instruments. Certain mechanical constructions are also mentioned, not well-known in general use but widely applied in military instruments.

References

1. DÉKÁNY, S.: Parallelitättoleranzen der binokularen Fernrohren, *Acta Technica* **XXII**, 193 (1958).
2. UHINK, W.: Über die mit Hilfe der Autokollimation sichtbaren reflektierten Bilder in Winkelpismen und ihre Anwendung zur Messung der Prismenfehler. *Ztschft. f. Instkunde*, **46** (1926).
3. GRABERT: Winkelfehler am Dachkantprisma. *Ztschft. f. Instkunde*, **62** (1942).

Professor N. BÁRÁNY, Budapest, XI., Gombocz Z. u. 17.

THE INTERPRETATION OF CHARACTERISTICS AND OF FUNDAMENTAL EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD

By

G. FODOR

Budapest Polytechnical University
Institute for Theoretical Electricity

(Received January 15, 1959)

It is customary to characterize the electromagnetic field by several vectors. In the course of computations, two vectors are used to describe the electric field and two for the magnetic field (vectors \mathbf{E} and \mathbf{D} , and \mathbf{H} and \mathbf{B} , respectively). There is much discussion about the physical interpretation of these vectors, even in our days. The basic questions are: Can the field be characterized by a single electric and a single magnetic vector? Which pair of vectors can be taken as of fundamental importance in this respect? What physical interpretation can then be given to the other pair of vectors?

The electric field used to be unequivocally characterized by the electric field strength (\mathbf{E}), quantity \mathbf{D} being regarded as secondary. At present, the viewpoint of using the vector of induction (\mathbf{B}) for the characterization of the magnetic field is quite wide-spread, as the power effect, further the induced field strength depends on the vector \mathbf{B} and on the variation of this latter with time, respectively. Hence value \mathbf{H} is only of secondary importance, the same as value \mathbf{D} . Their use is only motivated by the ease of computations attainable by their application. In the presence of substance, namely, several equations for \mathbf{D} and \mathbf{H} are very simple, while these same equations describing the field become quite complicated for vectors \mathbf{E} and \mathbf{B} .

Relying upon these findings the questions may arise whether these auxiliary vectors can be interpreted physically, further whether their value is determined unequivocally, or whether values used by us are taken arbitrarily. In the following it will be shown that vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} are vector-potential-like values which are not unequivocally determined by the equation of definition. Further limitations can only be set up in accordance with practicability and only their integral values can be measured.

1. Basic equations of the electromagnetic field in vacuo

In vacuo, the electromagnetic field is produced by the charges in the last analysis. In a co-ordinate system fixed in relation to the observer, charges are either static, or in moving condition. Current produced by moving charges

should, however, rather be regarded as an independent quantity. The field strength is divided into electric and magnetic components exactly according to the kind of force acting on static charges, and moving charges (or current), respectively. Accordingly two vector quantities are necessary to describe the field. Vector **E** indicating electric field strength supplies the force acting on a point-like charge Q :

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}, \quad (1.1)$$

while vector **B** indicating magnetic field strength supplies the turning moment operative on a point-like circuit of $\mathbf{m} = IAn^\circ$ dipole moment, or the force acting on charge Q moving at rate \mathbf{v} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.2)$$

So long as phenomena occur in vacuum, these two vectors are perfectly sufficient for the description of the field. On the basis of Maxwell's equations, charge density (ϱ) and current density (**J**) being known, these vectors can be determined. Maxwell's equations take the following form in vacuum:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{Ia})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{IIa}) \quad (1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IIIa})$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad (\text{IVa})$$

$$\mathbf{J} = \varrho \mathbf{v}, \quad (\text{Va})$$

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2. \quad (\text{VIa})$$

In the equations, ε_0 and μ_0 are the permittivity and the permeability of the vacuum, respectively. In the rationalised MKSA (or MSVA) system of units used here:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8,855 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

The equation determining the two field vectors needs not to be given here as it can be deduced from equation (VIa) describing energy density w . It is

interesting that the equation of continuity

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

which is of fundamental importance, needs not to be written separately, as it can be derived as the divergence of equation (I) by making use of equation (IV).

The two universal constants can be eliminated from the equations by introducing the following two new vectors: The vector of displacement as defined by $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ and the vector named (unfortunately) magnetic field strength as defined by equation $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$. After this formal transformation Maxwell's equations take the following shape:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{Ib})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{IIb})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IIIb})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \quad (\text{IVb})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}, \quad \mathbf{J} = \varrho \mathbf{v} \quad (\text{Vb}) \quad (1.5)$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B}. \quad (\text{VIb})$$

With the help of the first two equations in group (Vb), two vectors can be eliminated and the system of equations in this way arrived at can be solved unequivocally, ϱ and \mathbf{J} being known values.

2. Basic equations in the presence of substance

Equations immediately become complicated if a substance is present in the field. The electromagnetic field, namely, is influenced by the substance, consequently Maxwell's equations should also be modified. Generalization can be effected in three different directions.

The first possibility of generalization is to regard the first four equations under (1.5) as of general validity. From the viewpoint of computation technique, this method is the most convenient, and, consequently, the most wide-spread. The physical meaning of vectors \mathbf{E} and \mathbf{B} is determined by equations (1.1) and (1.2), but equation (Vb) determining vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} should be general-

ized. In the general case \mathbf{D} and \mathbf{H} can evidently be written as the sum or difference of a component proportional to vectors \mathbf{E} and \mathbf{B} , respectively, and of another vector. For the time being we know nothing about the physical meaning of these additive vectors, and of vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} . As the last result, Maxwell's equations are expressed in the following form :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\text{Ic})$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{IIc})$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IIIc})$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \varrho \quad (\text{IVc})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M},$$

$$\mathbf{J} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_e) + \varrho \mathbf{v}, \quad (\text{Vc}) \quad (2.1)$$

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{B}. \quad (\text{VIc})$$

How can now the vectors characterizing the field be measured within the substance? In fluids and gases \mathbf{E} and \mathbf{B} can be measured on the basis of equations (1.1) and (1.2). Vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} , however, can only be measured indirectly. One of the methods of measurement is, namely, to determine the force effect in vacuo (or in the air, what is practically the same) in slits of given shape cut into the substance at given directions. Now a value \mathbf{E}_0 of field strength and a value \mathbf{B}_0 of induction can be determined from equations (1.1) and (1.2). According to equation (1.5) values of \mathbf{D}_0 and \mathbf{H}_0 , respectively, can be determined in the slit. It follows from the laws on vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} that in a suitably prepared slit the measured values of \mathbf{D}_0 and \mathbf{H}_0 are just equal to values \mathbf{D} and \mathbf{H} produced in the substance. Similar, in principle, is the measurement of \mathbf{E} and \mathbf{B} in a solid substance. As the last result, always vectors \mathbf{E} and \mathbf{B} are measured, and of these values conclusions are drawn as to the value of vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} , respectively.

Another method of measurement is to use integral equations

$$\oint_A \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q, \quad \oint_S \mathbf{H} d\mathbf{s} = \Theta \equiv \int_A \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A} \quad (2.2)$$

which can be deduced from equations (IVb) and (Ib). As charge Q and excitation (MMF) Θ can be measured, the above integrals are known. If a condition (with the necessary symmetry or other characteristics) can be produced in such a way that the vectors can unequivocally be determined from the integrals, then the measurement has been carried out. A measurement of this type is e.g. the determination of charges induced on a metal plate, or the indication of the compensation of the magnetic field by a dipole. Obviously, in the last result, force effects are observed here too. Under completely homogeneous conditions, in case of a high-grade symmetry, \mathbf{D} and \mathbf{H} can also be computed. The control of computations by measurement, however, means in the last effect the measuring of vectors \mathbf{E} and \mathbf{B} .

After the determination of vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} by measurement or computation, the value of vectors \mathbf{P} and \mathbf{M} can also be determined. According to experiences, the following formulae are valid for a wide group of substances :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \kappa'_m \mathbf{B} = \kappa_m \mathbf{H} \quad (2.3)$$

where κ is the electric or magnetic susceptibility. (In theory it would be more correct to apply κ'_m , but in general the value $\kappa_m = \kappa'_m / (1 - \kappa'_m)$ is given.) Thus with denominations

$$\varepsilon_0 (1 + \kappa_e) = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon, \quad \mu_0 (1 + \kappa_m) = \mu_0 \mu_r = \mu \quad (2.4)$$

the following formulae are obtained :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (2.5)$$

where ε and μ are scalar values depending on the substance (eventually also on temperature, density and frequency). In crystalline substances ε and μ can also be interpreted as tensors (the same can be said of conductivity γ). For many materials (electretes, ferromagnetic substances), however, ε and μ cannot at all be analytically determined. For such hard magnetic materials the approximation $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ is sometimes allowable, where \mathbf{M}_0 is a vector independent of the magnetic field. In general, however, we have to make use of approximation methods in such cases (e.g. the application of the magnetization curve, or any analytic approximation of it).

It can be proved by computation that even vectors **P** and **M** can be given a physical meaning. By imagining the material to be built up, from an electric and magnetic point of view, of molecular dipoles, having dipole moments **p** and **m**, respectively, then the specific density of these dipole moments in the field supplies the values of the electric and magnetic polarization in the given point of the field. These are precisely vectors **P** and **M**:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}}{\Delta V}; \quad \mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V}. \quad (2.6)$$

It should be noted that in case of ferromagnetic materials the origin of magnetic dipoles are much more complicated than those of the electric dipoles. From the viewpoint of the phenomenological discussion, however, this quantum-physical background needs be of no concern.

To sum up, the way of generalization is the following: Vectors **D** and **H**, further **P** and **M** are formally introduced, the method of measuring vectors **D** and **H** is determined, empirical relationships are found between vectors **E**, **D**, **P** and **B**, **H**, **M**, respectively, finally the physical meaning of vectors **P** and **M** can be given.

3. Further possibilities of building up the basic equations

Another method of generalization is based on Lorentz' electron theory, according to which the presence of a substance only means that charges and currents coupled to the substance (molecular dipoles, and molecular circuits or magnetic dipoles, respectively) also produce a field, beyond the external charges and currents. Consequently, Maxwell's equations for vacuum are sufficient to describe the field, as the word "substance" only means the appearance of additive charges and currents. The average value (in respect to time and space) of electric and magnetic field strength values computed in the described way, can be measured. This method is exceptionally clear and well-arranged, it corresponds strictly to physical realities. For practical computations, however, just because of the complete generalization, it is, it may be said, unusable.

The third method of building up the basic equations is in essence a middle way between the previously mentioned two ways. The field is described by the well-defined vectors **E** and **B**, and the presence of the substance is accounted for by the polarization vectors as defined by equation (2.6). The basic equations can be formally obtained by eliminating vectors **D** and **H** from the equations given under (2.1). In this way we arrive at the following system of equations:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \operatorname{rot} \mathbf{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right), \quad (\text{Id})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{IIId})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IIIId})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\varrho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad (\text{IVd})$$

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{P}}{\Delta V}, \quad \mathbf{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{m}}{\Delta V}, \quad (\text{Vd}) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{J} = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_e) + \varrho \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial \mathbf{E}^2}{\partial t} + \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] + \left[\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}^2}{\partial t} - \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (\text{VIId})$$

Equation systems (2.1) and (3.1) are evidently equivalent in essence, from the mathematical point of view. In the first case vectors \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{P} and \mathbf{M} have only a formal role, the principle of their measuring and their physical meaning will be shown only later. In equation system (3.1) every quantity has a physical interpretation. The difficulty lies in finding the relationship between the polarization vectors and the field intensity vectors. It now stands to reason to declare that polarization is simply proportional to field intensity in general, and equations (2.3), or in single cases the polarization, are values independent of field intensity. The most general linear formulae for vectors \mathbf{P} and \mathbf{M} are

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_o + \varepsilon_0 \varkappa_e \mathbf{E} + \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B} + \frac{\varkappa'_m}{\mu_o} \mathbf{B} + \mathbf{M}. \quad (3.2)$$

The very complicated relationships of ferromagnetic materials cannot naturally be followed up here either, as the difference between the two methods of discussion lies not in the content, but in the way it is comprehended. The equations presented here are somewhat more complicated than usual, but every quantity has a direct physical meaning.

It should be noted that the equation of continuity (1.4) can be deduced from the first four equations here too.

Equation VI is presented in a somewhat different form, as in place of energy density its variation with respect to time has been given. We shall revert to the discussion of this equation later.

4. The analogy of electric and magnetic characteristics

It is evident from the preceding discussion that, at building up the equation system, vectors **E** and **B** were regarded as values determining field strength, vectors **D** and **H** having only the role of auxiliary quantities for computation purposes. Experimental results proving equations (1.1) and (1.2) make this analogy evident. In spite of this, vectors **E** and **H** are regarded by many as analogous. The reason is the historical origin, which is also shown by the fact that both quantities are named field strength vector. In accordance with the preceding discussion, vector **B** should be rightly named magnetic field strength. At the same time Maxwell's equations given under (2.1) undeniably hint at this analogy, even formally. *E.g.* in case of no charge or current

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{Ie}), & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{IIe}) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \quad (\text{IIIe}), & \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0 \quad (\text{IVe}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

This grouping decidedly hints at an **E—H**, **D—B** analogy. This formalism, however, is artificial. Let us, namely, collect the equations containing the charge or current exciting the field, and those not containing these quantities :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J}, \quad (\text{If}), & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \varrho; \quad (\text{IVf}) \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \quad (\text{IIIf}), & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \quad (\text{IIIIf}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

It is evident of this grouping that vectors **H** and **D** are those in close relationship with the exciting effect, while equations that can be simply reduced to zero relate to **E** and **B**. It is strictly formal, whether the formation of rotation or of divergence is prescribed in the mathematical formulation, as the same vector operation cannot lead to the vectorial current density and to the scalar charge density, respectively.

The question of formalism is finally decided by the relativistic formulation of the matter. The decomposition of the electromagnetic field into an electric and a magnetic field, namely, is known to be no objective operation, as it depends on the relative motion of the observer and of the charges. *E.g.* an observer fixed to the charge notices only the electrostatic field, in the case, however, that the charge and the observer have a relative displacement, then the observer may also notice the magnetic field.

The relativistic wording, in turn, knows only the electromagnetic field: the electrostatic and magnetic field strength values can be concentrated in a single antisymmetric field strength four-tensor $\tilde{\mathfrak{F}}$.

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & B_y & -\frac{j}{c} E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{j}{c} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{j}{c} E_z \\ \frac{j}{c} E_x & \frac{j}{c} E_y & \frac{j}{c} E_z & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

The rotation four-tensor of this tensor is zero, which exactly corresponds to the contracted form of Maxwell's equations II—III given under (4.2). The tensor of excitation can similarly be written:

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -jc D_x \\ -H_z & 0 & H_x & -jc D_y \\ H_y & -H_x & 0 & -jc D_z \\ jc D_x & jc D_y & jc D_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

The divergence four-vector of this vector supplies the current density four-vector \mathfrak{S} :

$$\mathfrak{S} = (J_x, J_y, J_z, jc \varrho). \quad (4.5)$$

This in turn, is the contracted form of equations I and IV given under (4.2).

The relativistic wording clearly expresses the fact that \mathbf{E} and \mathbf{B} on the one hand, and \mathbf{D} and \mathbf{H} on the other are analogous, as during the motion these values are transformed one into the other. It is also evident that Maxwell's equations I and IV, and II and III, respectively, are connected equations. This is another side of the same question.

It follows from the precedings that the equation system given under (3.1) contains physically well-defined vectors. Let us now examine how Maxwell's equations given under (2.1) can be deduced from this build-up, as the introduction of vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} , generally, greatly facilitates the computations.

5. Introduction of auxiliary quantities

The system of equations (3.1) describes the regularity of the electromagnetic field. In a given case, our task is to solve these equations in conformity with given conditions. For the solution, the introduction of new auxiliary

quantities is advisable. The essence of these is that for the sake of unification of formulation, scalar quantities (charge density and energy density) should be deduced from vectorial quantities, and even the other quantity exciting the field (current density) should be deduced from a vector. These equations do not contain any new physical assertions, they only define new quantities. Assertions relating to the regularity of the electromagnetic field are contained in equations I—V as well as in formula (3.2) for vectors **P** and **M**.

At first charge density is deduced as the divergence of a vector potential **D**:

$$\varrho = \operatorname{div} \mathbf{D}. \quad (5.1)$$

This equation exactly corresponds to equation IV of the usual wording (2.1) but the interpretation is just the inverse of that one. There, the divergence of **D**, where **D** is regarded as a basic quantity, is taken as a new quantity defined by this relation, which will later be proved to be the charge density. Here, quite contrarily, vector **D** has been introduced to describe charge density which is taken as a basic quantity. Equation (5.1) is substituted into the equation of continuity (1.4). Changing the order of partial derivation with respect to time and place, after reduction, we obtain

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5.2)$$

As the expression inside the brackets is source-free, it can be deduced as the rotation of a vector potential:

$$\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (5.3)$$

Thereby equation I of the customary system of equations (2.1) is arrived at. The value of **H**, however, appears as a deduced quantity, like **D** in the previous case. In this wording it is no wonder, therefore, that **D** and **H**, as vector potentials, cannot be generally given a direct physical meaning. The derivation (divergence or rotation) of both quantities being coupled to physically well-defined quantities (charge density and current density), it is obvious that the integrals of vector potentials supply integral values characteristic as shown by equations (2.2).

As can be seen, the auxiliary quantities in this way defined are in relationship with quantities exciting the field. Consequently they supply, beside the vectors characterizing field strength, data as to the excitation of the field, wherefore they can be named vectors of excitation.

Our third auxiliary equation produces a relationship between the variation of energy density and power density on one hand, and a vector quantity on the other, in the following form :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{E} \mathbf{J} = - \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (5.4)$$

This equation will be discussed later.

Vector potentials introduced in this way, however, are not univocally defined. We may yet freely dispose of the rotation of \mathbf{D} and of the divergence of \mathbf{H} . By placing equation (5.1) into equation IV of system (3.1) we obtain

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} - \mathbf{D}) = 0.$$

The quantity in the brackets can again be written as the rotation of a vector :

$$\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} - \mathbf{D} = \operatorname{rot} \mathbf{C} \quad (5.5)$$

where \mathbf{C} can be any vector. If \mathbf{C} is taken as zero, then the well-known equation

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (5.6)$$

will be arrived at. The relationships between the magnetic characteristics should now be examined. Equation (5.3) and the newly found equation (5.6) is substituted into equation I under (3.1) :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} - \mathbf{H} \right) = 0.$$

The quantity in the brackets is free of turbulence, consequently, it can be written as the gradient of any ψ scalar value :

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} - \mathbf{H} = - \operatorname{grad} \psi. \quad (5.7)$$

Taking $\operatorname{grad} \psi$ as zero the well-known equation

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (5.8)$$

will be obtained. By this choice the following equations for the rotation of \mathbf{D} and the divergence of \mathbf{H} will be arrived at, by virtue of equations II and III

under (3.1) :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{D} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{P}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= -\operatorname{div} \mathbf{M}.\end{aligned}\quad (5.9)$$

In the case of vector potentials, however, it is habitual to have, generally, the most simple equation for them. *E.g.* in the case of a quasistationary field, equation $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ is chosen besides the defining equation $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. In our case this is impossible, as by choosing $\operatorname{rot} \mathbf{C} = 0$ and $\operatorname{grad} \psi = 0$ disposition has already been made over the rotation of \mathbf{D} and the divergence of \mathbf{H} . There is, however, no obstacle in introducing, by suitably choosing \mathbf{C} , a vector potential \mathbf{D}^* the rotation of which is equal to zero :

$$\operatorname{div} \mathbf{D}^* = \varrho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{D}^* = 0. \quad (5.10)$$

It follows from the first condition that the integral of \mathbf{D}^* for a closed surface also supplies the charge enclosed by that surface.

Forming the rotation of equation (5.5) gives :

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{P} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{C}.$$

As known from the vector analysis :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{C} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{C} - \Delta \mathbf{C}.$$

By choosing the divergence of any vector \mathbf{C} as zero, the following vectorial Poisson's equation will be arrived at :

$$\Delta \mathbf{C} = -\operatorname{rot} \mathbf{P} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5.11)$$

The solution of this equation :

$$\mathbf{C} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot} \mathbf{P}}{r} dV - \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\mathbf{B}}{r} dV. \quad (5.12)$$

Consequently, the relationship between \mathbf{D}^* and \mathbf{E} is :

$$\mathbf{D}^* = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_V \frac{\operatorname{rot} \mathbf{P}}{r} dV + \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \int_V \frac{\mathbf{B}}{r} dV. \quad (5.13)$$

By substituting \mathbf{D}^* into the equation of continuity we obtain :

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} \right) = 0.$$

The expression, in the brackets, can be deduced as the rotation of a vector potential. Similarly to the preceding computation, let us suppose the condition equations relating to the vector potential designated by \mathbf{H}^* to be the most simple ones :

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^* = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^* = 0. \quad (5.14)$$

It follows from the first condition that the integral of \mathbf{H}^* for a closed curve also determines the excitation enclosed by the curve.

The divergence of equation (5.7) is :

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi. \quad (5.15)$$

The solution of this Poisson's equation is :

$$\psi = - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}}{r} dV \quad (5.16)$$

Consequently, by virtue of equation (5.7) :

$$\mathbf{H}^* = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}}{r} dV. \quad (5.17)$$

The equations for both \mathbf{D}^* and \mathbf{H}^* can be further transformed, as the differential operator may be carried below the sign of integration. It is, however, not worth while to carry out this transformation. It is of no use, namely, to introduce vectors \mathbf{D}^* and \mathbf{H}^* in place of vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} , respectively, as this would hardly mean making the computations more easy. Therefore we do not examine whether there are any singularities in the solution of equations (5.11) and (5.16). It can nevertheless be seen that these two vectors differ only in one or two additive members and they are identical in case of the fulfilment of some conditions which are often realized. The only aim of our discussion was to show that the main equations I—V express an objective regularity and that they cannot be chosen otherwise. The auxiliary equations, however, can only be regarded as definitions which could also be written in other ways if the viewpoints of practicability and tradition were not taken into account.

6. The power density vector

Let us now examine the auxiliary quantity \mathbf{S} introduced into equation (5.4) which is in connection with the variation of energy :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \mathbf{E} \mathbf{J} = - \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (6.1)$$

The first thing to be examined is : With which physical quantity is vector \mathbf{S} in relationship? For the sake of simplicity let us suppose that there is no convective current and the substance is isotropic. In this case, by expressing \mathbf{E} from the 3rd member of Maxwell's V equation and placing this value into (6.1) :

$$- \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{J^2}{\gamma} - \mathbf{E}_e \mathbf{J} + \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (6.2)$$

By integrating this equation for a given volume we obtain the equilibrium of power :

$$- \frac{dW_{e.m.}}{dt} = \int_V \frac{J^2}{\gamma} dV - \int_V \mathbf{E}_e \mathbf{J} dV + \oint_A \mathbf{S} d\mathbf{A}. \quad (6.3)$$

The left side of the equation gives the decrease of the electromagnetic energy with time within the given volume. At the right side the first member is the Joule heat, the second is the power produced (or consumed) by the inserted fields, the third is the power flowing through the surface surrounding the given volume.

"Vector potential" \mathbf{S} , therefore, is Poynting's power flow vector the integral of which taken for a closed surface supplies the power flowing (radiating) through the surface.

Thereafter a relationship is to be found between energy density and the field characteristics. With this end in mind let us multiply Maxwell's II equation scalarly by \mathbf{H} , whilst equation (5.3) scalarly by \mathbf{E} . Afterwards the second equation is deduced from the first one :

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \mathbf{J} = \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (6.4)$$

By comparing this with equation (6.1) we may write :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (6.6)$$

As can be seen, in the expressions both for the variation of energy density and for the vector of power flow the vectors of both field strength and induction are included, and what is surprising they are not symmetrically arranged. This fact, however, means no contradiction to our opinion presented up to now. Neither the vector of energy density, nor that of radiation power have namely a direct physical meaning. Only the volume integral of energy density and the surface integral of the radiation vector can be interpreted physically. And it is known that both vectors \mathbf{D} and \mathbf{H} after integration supply a quantity having a physical content. Consequently, also the following equations are evidently possible :

$$\frac{dW_{e.m.}}{dt} = \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dV, \quad (6.7)$$

$$P_{rad} = \oint_A (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}. \quad (6.8)$$

Equation (6.6) is based on the following deliberation: If $\text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \text{div} \mathbf{S}$, then $\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{S}$. In the general case, however, $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ and vector \mathbf{S} differ in a divergence-free vector, consequently also equation

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{E} \times \mathbf{H} + \text{rot} \mathbf{K} \quad (6.9)$$

is a possible solution, as $\text{div} \mathbf{S}^* = \text{div} \mathbf{S} = \text{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$, whichever vector \mathbf{K} may be. In other words equation (6.1) only determines the divergence of \mathbf{S} , but we have free disposition over its rotation. In accordance with (6.6), however, we obtain univocally :

$$\text{rot} \mathbf{S} = \text{rot} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (6.10)$$

Similarly to the previous case, a rotation-free vector \mathbf{S}^* could be determined in this case too.

According to relativistic meditations, however, the rotation of vector \mathbf{S} is not simply a formal problem. A determined impulse moment pertains namely to the energy flow. If therefore we want vector \mathbf{S} actually to determine power flow in any point, then its rotation should correspond to the impulse moment of the electromagnetic field. On this basis the validity of equation $\text{rot} \mathbf{S} = \text{rot} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ can be proved. This also means that in equation (6.9) $\text{rot} \mathbf{K} = 0$, consequently equation (6.6) supplies the value \mathbf{S} at a given place.

It should be noted that from a relativistic viewpoint equation (6.1) is the fourth component of the divergence of the energy-impulse tensor.

7. Energy density

Finally it should be briefly discussed, why the derivation in respect to time of energy density and not energy density itself are included both in equation IV under (3.1) and in equation (6.1). Formally, this fact is sufficiently evident, as the great majority of physical laws can be written in the form of differential equations.

On examining energy, the variations should be determined as energy itself, that is a quantity that cannot be measured. We can only measure the labour necessary to arrive from a state into another given state, or inversely the labour that is freed when the system is transformed from one state into another. If the basic state can be univocally defined and the introduced labour can be divided into parts one of which is changing energy content and the other transformed into heat, then the corresponding work values (that may be negative values too) can be identified with the energy of the system.

Let us now examine the variation of electromagnetic energy density. Equation (6.5) is integrated in respect to time :

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial w}{\partial t} dt = \int_{t_0}^t \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dt.$$

Denominations

$$w(0) = w_0, \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0$$

are introduced :

$$w - w_0 = \int_{\mathbf{D}_0}^{\mathbf{D}} \mathbf{E} d\mathbf{D} + \int_{\mathbf{B}_0}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad (7.1)$$

In the most simple case the polarizations are the homogeneous linear functions of field intensity according to equation (2.3), that is

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}. \quad (7.2)$$

In this case we obtain :

$$\begin{aligned} w - w_0 &= \frac{1}{2} \varepsilon (E^2 - E_0^2) + \frac{1}{2} \mu (H^2 - H_0^2) = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon (E^2 - E_0^2) + \frac{1}{2\mu} (B^2 - B_0^2). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Be $E_0 = 0$, $B_0 = 0$, $H_0 = 0$ and to this state an energy density $w_0 = 0$ is logically ordered. In this way the well-known formula for energy density is arrived at :

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2. \quad (7.4)$$

If there is a permanent polarization too, we may write on the basis of equation (3.2)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}_0. \quad (7.5)$$

In this case the following formula is obtained for the change of energy density :

$$\begin{aligned} w - w_0 &= \frac{1}{2} \varepsilon (E^2 - E_0^2) + \frac{1}{2} \mu (H^2 - H_0^2) = \\ &= \left[\frac{D^2 - D_0^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathbf{D} - \mathbf{D}_0}{\varepsilon} \mathbf{P}_0 \right] + \left[\frac{B^2 - B_0^2}{2\mu} - \frac{\mathbf{B} - \mathbf{B}_0}{\mu} \mu_0 \mathbf{M}_0 \right]. \end{aligned} \quad (7.6)$$

To which state should $w_0 = 0$ now be ordered? The most simple form is obtained by choosing $E_0 = 0$, $H_0 = 0$, $w_0 = 0$ and expressing energy density by E and H . In this case, namely

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (7.7)$$

As $\mathbf{D}_0 = \mathbf{P}_0$ and $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{M}_0$, the other two equations will become much more complicated. Though the above choice is the most simple, it is not the most logic one. It would be more obvious to denominate that state as free of energy in which there are no charges or currents, that is in case of $D_0 = 0$ and $H_0 = 0$ is $w_0 = 0$. Computing now with D and H , we obtain :

$$w = \left[\frac{D^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{P}_0}{\varepsilon} \right] + \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (7.8)$$

It should be emphasized, however, that this choice is similarly arbitrary, as we have no physical ground to state that the energy content of a polarized substance is zero.

As far as polarization is a (inhomogeneous) linear function of field intensity, however, the processes are reversible and the zero level may be taken at will. In respect to computation technique this fact is of no importance just as the choice of the zero level of potential energy is also arbitrary.

In case of a homogenous non-linear relationship (e.g. soft magnetic materials) the processes are reversible, the zero level of energy density can univocally be fixed to the state $E_0 = 0$, $D_0 = 0$ and $H_0 = 0$, $B_0 = 0$, respectively, while energy density can in principle be computed in the following form :

$$w = \int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D} + \int_0^B \mathbf{H} d\mathbf{B} . \quad (7.9)$$

It can also be easily plotted in a graph as the area between the characteristic curve and the axes D and B , respectively, this being well-known for the case of ferromagnetic materials.

The situation is the most complicated when processes are irreversible, that is, the polarization is a non-linear and non-homogeneous function of field intensity. This is the situation e.g. in case of hard magnetic materials (permanent magnetic materials). In such a case we should account for the thermodynamic effects due to variations in the electromagnetic field, as e.g. hysteresis loss. In this case no rational and usable supposition can be taken for the zero level of energy density and only the variation of energy density can be described. This latter can simply be graphically interpreted by making use of the well-known method of the energetic analysis of the hysteresis loop.

Energy is influenced by thermodynamic effects even in the most simple cases. The total energy of any system, namely, can be divided into thermal and electromagnetic energies. If polarization and consequently permittivity and permeability are functions of time, then the variations of electromagnetic and thermal energy are reciprocally influencing one another. Becker [3] has proved that in case of $\mathbf{P} = \epsilon_0 \kappa_e \mathbf{E}$ and of an isothermal transformation, the electromagnetic energy exactly equals the free energy (as named in the thermodynamic sense). In case of an electric field the total energy density is :

$$w = \left(1 + \frac{T}{\epsilon_r} \frac{d\kappa_e}{dT} \right) w' , \quad (7.10)$$

where $w' = \frac{1}{2} \epsilon E^2$, the density of the free energy. The expression $\epsilon E^2/2$ can therefore only be regarded as electric energy density if susceptibility (and consequently permittivity) do not depend on temperature. For many materials $\kappa_e = k/T$, therefore the total energy density is

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 < \frac{1}{2} \epsilon E^2 . \quad (7.11)$$

While the strength of the electric field increases from 0 to E , the value of heat produced or dissipated, in respect to the unit of volume is

$$q = \frac{1}{2} T \frac{dz}{dT} \varepsilon_0 E^2. \quad (7.12)$$

If susceptibility decreases with temperature the material sends out heat during the building up of the field. The corresponding magnetic effect can be expressed by the exchange of signs.

Summary

Maxwell's equation can be built up in two ways (beyond the Lorentz' conception). The one is to introduce quantities not defined in detail beside the quantities describing the field, which are related in an empirical way to the quantities describing the field. This method is practical from the viewpoint of computation technique. Its disadvantage is that it somewhat confuses the fact of the field being produced by charges and currents actually present or fixed to the substance.

The other way is to express directly the relationship between the quantities describing the field, and actual and fixed charges or currents. This method better emphasizes the physical essence of the matter, nevertheless it is too general, especially for the calculation of simple problems. Therefore the introduction of some new quantities was practicable, these have, however, only the role of auxiliary quantities for computation purposes (**D**, **H** and **S**). Maxwell's equations written in this form therefore express an objective regularity, the equations relating to these quantities, however, are only definitions, determined from the point of view of practicability only.

In the course of the discussion of the energy equation we have stated that in a general case only the variation of energy density can be described by a rule, if the thermodynamical effects or those of the material structure are not taken into account. In practice, however, the possibility of the application of both methods has its limitations. Therefore on computing energy, the course of the variation of the electromagnetic field should be taken into account.

References

1. SIMONYI, K.: *Elméleti villamosságtan*. Budapest, 1958.
2. SIMONYI, K.: *Theoretische Elektrotechnik*, Berlin, 1956.
3. NOVOBÁTZKY, K.: *A relativitás elmélete*. Budapest, 1951.
4. BECKER: *Theorie der Elektrizität*. Leipzig, 1951.
5. KNEISSLER: *Die Maxwellsche Theorie in veränderter Formulierung*. Wien, Springer, 1949.
6. ТАММ: *Основы теории электричества*. Москва—Ленинград 1959.
7. STRATTON: *Electromagnetic Theory*. New York, 1941.
8. FODOR, G.: *Relativisztikus elektrodinamika*. Budapest, 1955.
9. FODOR, G.: *Magyar Fizikai Folyóirat IV*. 1 (1956).

G. FODOR: Budapest, XI., Budafoki út 6—8. Hungary

ANWENDUNG DER MATRIZENRECHNUNG ZUR LÖSUNG
GEWÖHNLICHER, LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGS-
SYSTEME MIT VARIABLEN KOEFFIZIENTEN

Von
P. BAJCSAY

Lehrstuhl für Mathematik der Fakultät für Maschineningenieure (V.)
an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 20. Januar, 1959.)

I.

Es sei folgendes *System inhomogener linearer Differentialgleichungen*
in der sogenannten Cauchyschen Normalform gegeben :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t) x_1 + a_{12}(t) x_2 + \dots + a_{1n}(t) x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t) x_1 + a_{22}(t) x_2 + \dots + a_{2n}(t) x_n + f_2(t) \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t) x_1 + a_{n2}(t) x_2 + \dots + a_{nn}(t) x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Es seien ferner die Koeffizienten $a_{ik}(t)$ und die Funktionen $f_i(t)$ in dem abge-
schlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ stetige Funktionen. Nach Einführung der
Bezeichnungen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

kann das Gleichungssystem (1) einfach in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{2}$$

geschrieben werden. Zu suchen ist jene Lösung der Matrizen-Differential-
gleichung (2), die die gegebene (beliebige) Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

erfüllt.

Im allgemeinen Falle ist diese Differentialgleichung in geschlossener Form nicht lösbar.

II.

Stellt aber die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}(t)$ speziell eine Diagonalmatrix dar, d. h. ist $a_{ik}(t) \equiv 0$, wenn $i \neq k$ und ist mithin

$$\mathbf{A}(t) = \langle a_{11}(t), a_{22}(t), \dots, a_{nn}(t) \rangle,$$

dann wird die zu (2) zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_h = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_h \quad (3)$$

durch

$$\mathbf{x}_h = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \mathbf{x}_0 \quad (4)$$

gelöst, wobei

$$\mathbf{x}_h(0) = \mathbf{x}_0$$

den gegebenen Anfangswert und

$$e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} = \langle e^{\int_0^t a_{11}(\tau) d\tau}, e^{\int_0^t a_{22}(\tau) d\tau}, \dots, e^{\int_0^t a_{nn}(\tau) d\tau} \rangle$$

die lösende Diagonalmatrix bedeuten.

Anhand von (4) läßt sich auch die inhomogene Gleichung (2), mit dem vorgeschriebenen Anfangswert $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ lösen:¹

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau} \left\{ \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau) d\tau} \mathbf{f}(\tau_1) d\tau_1 \right\}. \quad (5)$$

III.

Im folgenden solle angenommen werden, daß die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}(t)$ der Gleichung (2) keine Diagonalmatrix ist, doch sei eine Ähnlichkeitstransformation [mit der Transformationsmatrix $\mathbf{H}(t)$] bekannt, die $\mathbf{A}(t)$ in

¹ Aus der Stetigkeit sämtlicher Elemente der Matrix $\mathbf{A}(t)$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ folgt, daß

$$e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau) d\tau}$$

regulär ist, also einen Kebrwert besitzt.

eine Diagonalmatrix zu überführen gestattet, d. h. es gelte

$$\mathbf{H}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{D}(t) = \langle d_{11}(t), d_{22}(t), \dots, d_{nn}(t) \rangle,$$

wobei vorausgesetzt ist, daß sowohl $\mathbf{A}(t)$ wie auch $\mathbf{D}(t)$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ stetige Elemente besitzen.

In diesem Falle geht die Differentialgleichung (2) in die Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{H}(t) \mathbf{x}) = \{ \mathbf{H}(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) \} (\mathbf{H}(t) \mathbf{x}) + \left\{ \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) \right) \mathbf{H}^{-1}(t) \right\} (\mathbf{H}(t) \mathbf{x}) + \\ + (\mathbf{H}(t) \mathbf{f}(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

über.

Nach Einführung von

$$\mathbf{H}(t) \mathbf{x} = \mathbf{y}; \quad \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) \right) \mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{B}(t); \quad \mathbf{H}(t) \mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t)$$

lautet die Differentialgleichung (6);

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{D}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \mathbf{y} + \mathbf{g}(t). \quad (7)$$

Der der Gleichung (2) zugehörigen Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

entspricht somit die Bedingung

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{H}(0) \mathbf{x}(0) = \mathbf{H}(0) \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0. \quad (8)$$

Zuerst soll die (der Gleichung (7) zugehörige) homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}_h = \mathbf{D}(t) \mathbf{y}_h + \mathbf{B}(t) \mathbf{y}_h; \quad \mathbf{y}_h(0) = \mathbf{y}_0 \quad (9)$$

gelöst werden.

Zu diesem Zweck bilden wir folgende Iterationsreihe von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathbf{y}_{h1} &= \mathbf{D}(t) \mathbf{y}_{h1} & ; & \quad \mathbf{y}_{h1}(0) = \mathbf{y}_0 \\
\frac{d}{dt} \mathbf{y}_{h2} &= \mathbf{D}(t) \mathbf{y}_{h2} + \mathbf{B}(t) \mathbf{y}_{h1} ; & \quad \mathbf{y}_{h2}(0) = \mathbf{y}_0 \\
\frac{d}{dt} \mathbf{y}_{h3} &= \mathbf{D}(t) \mathbf{y}_{h3} + \mathbf{B}(t) \mathbf{y}_{h2} ; & \quad \mathbf{y}_{h3}(0) = \mathbf{y}_0 \\
&\dots\dots\dots \\
\frac{d}{dt} \mathbf{y}_{hm} &= \mathbf{D}(t) \mathbf{y}_{hm} + \mathbf{B}(t) \mathbf{y}_{hm-1} ; & \quad \mathbf{y}_{hm}(0) = \mathbf{y}_0 \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{10}$$

Die Lösung der m -ten ($m \geq 2$) Gleichung des Iterationssystems (10) kann nun unter Berücksichtigung der Gleichungen (2) und (5) in der Form

$$\mathbf{y}_{hm}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau) d\tau} \left\{ \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \mathbf{B}(\tau_1) \mathbf{y}_{hm-1}(\tau_1) d\tau_1 \right\}, \tag{11}$$

dargestellt werden,² d. h. mit

$$\mathbf{M}_m(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau) d\tau} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \mathbf{B}(\tau_1) \mathbf{M}_{m-1}(\tau_1) d\tau_1 \right\} \tag{12}^3$$

wird

$$\mathbf{y}_{hm}(t) = \mathbf{M}_m(t) \mathbf{y}_0. \tag{13}$$

Bei Verwendung der im m -ten Iterationsschritt erhaltenen Näherungslösung (13) für die homogene lineare Differentialgleichung (9) lautet die Näherungslösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung (7) :

$$\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{M}_m(t) \left\{ \mathbf{y}_0 + \int_0^t \mathbf{M}_m^{-1}(\tau) \mathbf{g}(\tau) d\tau \right\}. \tag{14}$$

² Aus der Voraussetzung, die Elemente der Matrix $\mathbf{D}(t)$ seien stetig, folgt, daß die Matrix

$$e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau) d\tau}$$

einen Kehrwert besitzt.

³ $\mathbf{E} = \langle 1, 1, \dots, 1 \rangle$ bedeutet die Einheitsmatrix n -ter Ordnung.

Voraussetzung war hierbei, daß bei hinreichend großem m für jedes Element der Matrix

$$(\mathbf{D}(t) + \mathbf{B}(t)) \mathbf{M}_m(t) - \frac{d}{dt} \mathbf{M}_m(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}(t) & \varepsilon_{12}(t) & \dots & \varepsilon_{1n}(t) \\ \varepsilon_{21}(t) & \varepsilon_{22}(t) & \dots & \varepsilon_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varepsilon_{n1}(t) & \varepsilon_{n2}(t) & \dots & \varepsilon_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

die Beziehung

$$|\varepsilon_{ik}(t)| \leq \varepsilon$$

Gültigkeit hat, wenn ε eine gegebene, beliebig kleine positive Zahl ist.

Nun ist die Folge der Matrizen $\mathbf{M}_m(t)$ näher zu untersuchen:

$$\mathbf{M}_1(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau) d\tau};$$

$$\mathbf{M}_2(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau) d\tau} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \mathbf{B}(\tau_1) e^{\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} d\tau_1 \right\};$$

$$\mathbf{M}_3(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(\tau) d\tau} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \mathbf{B}(\tau_1) e^{\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \int_0^t e^{-\int_0^{\tau_2} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \mathbf{B}(\tau_2) e^{\int_0^{\tau_2} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \int_0^{\tau_2} e^{-\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \mathbf{B}(\tau_1) e^{\int_0^{\tau_1} \mathbf{D}(\tau) d\tau} d\tau_1 d\tau_2 \right\};$$

Durch Einführung der Bezeichnungen

$$\mathbf{F}(\tau_k) = e^{-\int_0^{\tau_k} \mathbf{D}(\tau) d\tau} \mathbf{B}(\tau_k) e^{\int_0^{\tau_k} \mathbf{D}(\tau) d\tau}$$

und

$$\mathbf{A}(t) = \int_0^t \mathbf{D}(\tau) d\tau,$$

lautet diese Folge

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_1(t) &= e^{\Delta(t)}; \\
 \mathbf{M}_2(t) &= e^{\Delta(t)} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 \right\}; \\
 \mathbf{M}_3(t) &= e^{\Delta(t)} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \right\}; \\
 \mathbf{M}_4(t) &= e^{\Delta(t)} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_3) \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right\}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \mathbf{M}_m(t) &= e^{\Delta(t)} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_3) \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1}) \int_0^{\tau_{m-1}} \mathbf{F}(\tau_{m-2}) \dots \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{m-2} d\tau_{m-1} \right\}; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß die Matrizenfolge $\{\mathbf{M}_m(t)\}$ und damit auch die Vektorenfolgen $\{\mathbf{y}_{hm}(t)\}$ und $\{\mathbf{y}_m(t)\}$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ konvergent sind.

Die Elemente der Matrix $\mathbf{A}(t)$ sind — unserer Voraussetzung gemäß — im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ stetige Funktionen. Ferner nehmen wir an, daß auch die Transformationsmatrix $\mathbf{H}(t)$, ihre Ableitung und ihr Kehrwert $\mathbf{H}^{-1}(t)$ stetige Elemente besitzen.⁴ Hieraus folgt auch die Stetigkeit der Elemente der Matrizen $e^{\Delta(t)}$ und $\mathbf{B}(t)$. Demzufolge ist $e^{\Delta(t)}$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ regulär, und ebenso sind die Elemente der Matrix

$$\mathbf{F}(t) = e^{-\Delta(t)} \mathbf{B}(t) e^{\Delta(t)}$$

stetig, woraus aber weiter folgt, daß die Elemente aller unserer Matrizen beschränkt sind.

Eine Matrix mit beschränkten Elementen besitzt eine obere Grenze, die zugleich eine obere Schranke aller Elemente darstellt. Im folgenden werden

⁴ Wenn die Elemente der Matrix $\mathbf{H}(t)$ stetig sind und $\mathbf{H}^{-1}(t)$ vorhanden ist, besitzt auch diese stetige Elemente.

wir diese obere Grenze die »*G-Norm*« der Matrix nennen, die folgendermaßen definiert wird:

K ist die *G-Norm* der Matrix \mathbf{K} , wenn für einen beliebigen Einheitsvektor \mathbf{e} die Beziehung

$$|\mathbf{K}\mathbf{e}| \leq G(\mathbf{K}) = K$$

gilt. Diese *G-Norm* ist nicht größer als die Quadratwurzel aus der Absolutquadratsumme aller Elemente der Matrix:⁵

$$G(\mathbf{K}) \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |K_{ij}|^2}.$$

Für die oben definierte *G-Norm* gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{KL}) &\leq G(\mathbf{K}) G(\mathbf{L}), \\ G(\mathbf{K} + \mathbf{L}) &\leq G(\mathbf{K}) + G(\mathbf{L}). \end{aligned}$$

Es sei im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$

$$G(e^{\Delta(t)}) \leq \alpha; \quad G(e^{-\Delta(t)}) \leq \alpha; \quad G(\mathbf{B}(t)) \leq \beta$$

und somit

$$G(\mathbf{F}(t)) \leq G(e^{-\Delta(t)}) G(\mathbf{B}(t)) G(e^{\Delta(t)}) \leq \alpha^2 \beta = \omega,$$

ferner

$$G\left(\int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1}) \int_0^{\tau_{m-1}} \mathbf{F}(\tau_{m-2}) \dots \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{m-2} d\tau_{m-1}\right) \leq \frac{\omega^{m-1} b^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Dann ist

$$G(\mathbf{M}_m(t)) \leq \alpha \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k b^k}{k!},$$

und dieselbe Abschätzung gilt auch für jedes Element der Matrix $\mathbf{M}_m(t)$.

Wenn wir noch voraussetzen, daß

$$|\mathbf{y}_0| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_{0i}|^2} \leq \delta,$$

daß ferner im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$

$$|\mathbf{g}(t)| \leq \gamma,$$

⁵ Siehe z. B. [1], Seite 38.

so wird einerseits

$$|\mathbf{y}_{hm}(t)| \leq \alpha \delta \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k b^k}{k!} \quad (15)$$

und andererseits

$$|\mathbf{y}_m(t)| \leq \alpha(\delta + \gamma b) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k b^k}{k!}. \quad (16)$$

Es sind daher die Matrizenfolge $\{\mathbf{M}_m(t)\}$ und somit auch die Vektorenfolgen $\{\tilde{\mathbf{y}}_{hm}(t)\}$ sowie $\{\mathbf{y}_m(t)\}$ im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ gleichmäßig konvergent.

Es sei $\tilde{\mathbf{y}}_h$ der Grenzwert der Folge $\{\mathbf{y}_{hm}\}$. Dann gilt für eine hinreichend große Zahl m offenkundig

$$\mathbf{y}_{hm} \approx \mathbf{y}_{hm-1} \approx \tilde{\mathbf{y}}_h,$$

also

$$\tilde{\mathbf{y}}_h = \mathbf{y}_h,$$

wobei \mathbf{y}_h die genaue Lösung der Differentialgleichung (9) bedeutet. Nach analoger Schlußweise leuchtet ein, daß die genaue Lösung \mathbf{y} der Differentialgleichung (7) mit dem Grenzwert der Folge $\{\mathbf{y}_m\}$ übereinstimmt.

Der Fehler zwischen der genauen Lösung $\mathbf{y}(t)$ und der in m -ten Iterations-schritt erhaltenen Näherung $\mathbf{y}_m(t)$ läßt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_m(t)| &\leq \alpha(\delta + \gamma b) \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\omega^k b^k}{k!} < \\ &< \alpha(\delta + \gamma b) \frac{\omega^m b^m}{m!} \frac{m}{m - \omega b}, \end{aligned} \quad (17)$$

vorausgesetzt, daß m genügend groß ist, damit $\omega b < m$ sei.

Der durch die Formel (14) gewonnene Vektor $\mathbf{y}_m(t)$ kann als die Näherung $(m-1)$ -ter Ordnung der genauen Lösung $\mathbf{y}(t)$ betrachtet werden, so daß man also die Näherungslösung $(m-1)$ -ter Ordnung der ursprünglichen Differentialgleichung (2) in der Form

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbf{x}_m(t) = \mathbf{H}^{-1}(t) \mathbf{y}_m(t) \quad (18)$$

darstellen kann.

Wenn im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$

$$G(\mathbf{H}^{-1}(t)) \leq h,$$

gilt anhand der Beziehungen (17) und (18) die Abschätzung

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_m(t)| < h a (\delta + \gamma b) \frac{\omega^m b^m}{m!} \frac{m}{m - \omega b}. \quad (19)$$

Zum Beweis der Richtigkeit der Näherungsformel (14) ist noch nachzuweisen, daß die Matrix $\mathbf{M}_m(t)$ nicht singulär ist, d. h. daß sie einen Kehrwert besitzt. Wir schreiben zu diesem Zwecke die Matrix $\mathbf{M}_m(t)$ in der Form

$$\mathbf{M}_m(t) = e^{\Delta(t)} \Phi_m|_0^t,$$

$$\begin{aligned} \Phi_m|_0^t = & \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_3) \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\ & + \dots + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1}) \int_0^{\tau_{m-1}} \mathbf{F}(\tau_{m-2}) \dots \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{m-2} d\tau_{m-1}. \end{aligned}$$

Da

$$\mathbf{M}_m^{-1}(t) = (\Phi_m|_0^t)^{-1} e^{-\Delta(t)},$$

und $e^{-\Delta(t)}$ nach unseren Voraussetzungen vorhanden ist, bleibt nur zu beweisen, daß $\Phi_m|_0^t$ nicht singulär ist, d. h. daß

$$\det(\Phi_m|_0^t) = \Phi_m \neq 0.$$

Es gilt

$$\frac{d}{dt}(\Phi_m|_0^t) = \mathbf{F}(t) \Phi_{m-1}|_0^t$$

und

$$\mathbf{M}_m(0) = \Phi_m|_0^0 = \mathbf{E}.$$

Setzen wir voraus, daß m genügend groß ist, daß also mit guter Annäherung geschrieben werden kann

$$\mathbf{y}_{hm} \approx \mathbf{y}_h \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_m \approx \mathbf{y},$$

so wird

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m(t) & \approx \mathbf{M}(t) = e^{\Delta(t)} \Phi|_0^t = \\ & = e^{\Delta(t)} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \right. \\ & \left. + \int_0^t \mathbf{F}(\tau_{m-1}) \int_0^{\tau_{m-1}} \mathbf{F}(\tau_{m-2}) \dots \int_0^{\tau_3} \mathbf{F}(\tau_2) \int_0^{\tau_2} \mathbf{F}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{m-2} d\tau_{m-1} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

mithin

$$\frac{d}{dt}(\Phi|_0^t) = \mathbf{F}(t) \Phi|_0^t, \quad (20)$$

$$\Phi|_0^0 = \mathbf{E}. \quad (21)$$

Es muß somit nur nachgewiesen werden, daß

$$\det(\Phi_n|_0^t) \approx \det(\Phi|_0^t) = \Phi \neq 0.$$

Es sei⁶

$$\Phi = \begin{vmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) & \dots & \Phi_{1n}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) & \dots & \Phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi_{n1}(t) & \Phi_{n2}(t) & \dots & \Phi_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

und durch Differentiation der Determinante

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{vmatrix} \Phi'_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi'_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi'_{n1} & \Phi_{n2} & \dots & \Phi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi'_{12} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi'_{22} & \dots & \Phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \dots & \Phi_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi'_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \dots & \Phi'_{nn} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Nach der Entwicklung der Gleichung (20) folgt:

$$\begin{bmatrix} \Phi'_{11} & \Phi'_{12} & \dots & \Phi'_{1n} \\ \Phi'_{21} & \Phi'_{22} & \dots & \Phi'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi'_{n1} & \Phi'_{n2} & \dots & \Phi'_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \dots & \Phi_{nn} \end{bmatrix},$$

folglich wird

$$\Phi'_{ij} = \sum_{k=1}^n F_{ik} \Phi_{kj}. \quad (23)$$

⁶ Siche z. B. [2], Seite 139.

Setzen wir die in (23) enthaltenen Werte in die Gleichung (22) ein und fassen wir die das F_{ij} als Koeffizienten enthaltenden Glieder zusammen, so ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{dt} = (F_{11} + F_{22} + \dots + F_{nn})\Phi,$$

und daraus

$$\Phi = C e^{\int_0^t (F_{11} + F_{22} + \dots + F_{nn}) d\tau},$$

wobei die Gleichung (21) die Integrationskonstante festsetzt, somit $C = 1$ wird.

Hieraus und aus der vorausgesetzten Stetigkeit der Elemente der Matrix $\mathbf{F}(t)$ folgt, daß Φ im ganzen abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ von Null verschieden ist. Damit ist aber auch $\Phi \Big|_0^t \approx \Phi_m \Big|_0^t$ nicht singulär.

Zur Bestimmung der Näherungslösungen (13) und (14) ist die durch Gleichung (12) dargestellte Matrix $\mathbf{M}_m(t)$ zu berechnen. Zur praktischen Berechnung dieser Matrix sei bemerkt, daß sich (13) auch in der Form⁷

$$\mathbf{y}_{hm}(t) = e^{\Delta(t)} \Phi_m \Big|_0^t \mathbf{y}_{hm}(0) = e^{\Delta(t)} \Phi_m \Big|_{t_n}^t \mathbf{y}_{hm}(t_n)$$

schreiben läßt. Ganz analog gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{hm}(t_n) &= e^{\Delta(t_n)} \Phi_m \Big|_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{y}_{hm}(t_{n-1}); \mathbf{y}_{hm}(t_{n-1}) = e^{\Delta(t_{n-1})} \Phi_m \Big|_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \mathbf{y}_{hm}(t_{n-2}); \dots \\ \dots; \mathbf{y}_{hm}(t_1) &= e^{\Delta(t_1)} \Phi_m \Big|_0^{t_1} \mathbf{y}_{hm}(0) = e^{\Delta(t_1)} \Phi_m \Big|_0^{t_1} \mathbf{y}_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$\mathbf{y}_{hm}(t) = e^{\Delta(t)} \Phi_m \Big|_{t_n}^t e^{\Delta(t_n)} \Phi_m \Big|_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\Delta(t_{n-1})} \Phi_m \Big|_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \dots e^{\Delta(t_1)} \Phi_m \Big|_0^{t_1} \mathbf{y}_0. \quad (24)$$

Wählen wir nun eine Einteilung des Intervalls $[0, t]$

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-2} < t_{n-1} < t_n < t \leq b$$

dermaßen, daß die benachbarten (t_i, t_{i+1}) -Werte genügend nahe zueinander zu liegen kommen, damit

$$\max |t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$$

sei (ε bedeutet dabei eine beliebig kleine positive Zahl).

⁷ Siehe z. B. [2], Seite 141.

Hierfür gilt

$$G(\Phi_m |_{t_i}^{t_{i+1}}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\omega^k \varepsilon^k}{k!}.$$

Wenn also ε hinreichend klein ist, ergibt sich mit guter Annäherung

$$\Phi_m |_{t_i}^{t_{i+1}} \approx \mathbf{E} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{F}(\tau) d\tau,$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m(t) \approx e^{\Delta(t)} \left\{ \mathbf{E} + \int_{t_n}^t \mathbf{F}(\tau) d\tau \right\} e^{\Delta(t_n)} \left\{ \mathbf{E} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{F}(\tau) d\tau \right\} e^{\Delta(t_{n-1})} \left\{ \mathbf{E} + \right. \\ \left. + \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} \mathbf{F}(\tau) d\tau \right\} \dots e^{\Delta(t_1)} \left\{ \mathbf{E} + \int_0^{t_1} \mathbf{F}(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

IV.

Setzen wir schließlich voraus, daß $\mathbf{A}(t)$ keine Diagonalmatrix ist, und daß auch keine Ähnlichkeitstransformation bekannt sei, durch die $\mathbf{A}(t)$ in eine Diagonalmatrix transformiert werden kann.

Es sei aber $\mathbf{G}(t)$ eine diagonalisierbare Matrix, die die Matrix $\mathbf{A}(t)$ in der G -Norm gut annähert, d. h. im abgeschlossenen Intervall $0 \leq t \leq b$ sei $G(\mathbf{A}(t) - \mathbf{G}(t)) = G(\mathbf{K}(t))$ möglichst klein, und

$$\mathbf{H}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) = \mathbf{D}(t)$$

stelle eine Diagonalmatrix dar.

Mit diesen Voraussetzungen kann die zu lösende Differentialgleichung (2) in der Form

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{G}(t) \mathbf{x} + \mathbf{K}(t) \mathbf{x} + \mathbf{f}(t); \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (26)$$

oder nach Multiplikation von links mit der Transformationsmatrix $\mathbf{H}(t)$ in der Form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{H}(t) \mathbf{x}) = \{ \mathbf{H}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) \} (\mathbf{H}(t) \mathbf{x}) + \{ \mathbf{H}(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) + \\ + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) \right) \mathbf{H}^{-1}(t) \} (\mathbf{H}(t) \mathbf{x}) + (\mathbf{H}(t) \mathbf{f}(t)); \quad \mathbf{H}(0) \mathbf{x}(0) = \mathbf{H}(0) \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (27)$$

geschrieben werden.

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) \mathbf{x} &= \mathbf{y}; & \mathbf{H}(t) \mathbf{G}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) &= \mathbf{D}(t); & \mathbf{H}(0) \mathbf{x}_0 &= \mathbf{y}_0; \\ \mathbf{H}(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{H}^{-1}(t) + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H}(t) \right) \mathbf{H}^{-1}(t) &= \mathbf{B}(t); & \mathbf{H}(t) \mathbf{f}(t) &= \mathbf{g}(t); \end{aligned}$$

lautet die Differentialgleichung (27)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y} = \mathbf{D}(t) \mathbf{y} + \mathbf{B}(t) \mathbf{y} + \mathbf{g}(t); \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (28)$$

Diese Differentialgleichung ist formell mit der Gleichung (7) völlig identisch, sie läßt sich mithin analog dem (im Teil III) angegebenen Verfahren lösen.

Betrachten wir nun einige Sonderfälle:

a) Die Berechnungen vereinfachen sich, wenn

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{H} \quad (29)$$

von der Veränderlichen t unabhängig ist. (Dies ist z. B. der Fall, wenn $\mathbf{G}(t)$ eine zyklische Matrix ist.) Dann gilt nämlich

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H} \equiv 0$$

und dementsprechend

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{H} \mathbf{K}(t) \mathbf{H}^{-1}. \quad (30)$$

a_1) Stellen \mathbf{H} und $\mathbf{K}(t)$ noch speziell vertauschbare Matrizen dar, wird

$$\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{K}(t). \quad (31)$$

b) Die Berechnung vereinfacht sich auch, wenn $e^{\Delta(t)}$ und $\mathbf{B}(t)$ vertauschbare Matrizen sind, da in diesem Falle

$$\mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{B}(t). \quad (32)$$

b_1) Eine noch wesentlichere Vereinfachung folgt aus der Voraussetzung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(t) \equiv \mathbf{B}(t) \quad (33)$$

u. zw. unabhängig von t , denn es gilt dann

$$\mathbf{y}_k(t) = e^{\Delta(t)} e^{\mathbf{F}t} \mathbf{y}_0 = e^{\Delta(t) + \mathbf{F}t} \mathbf{y}_0 \quad (34)$$

und die genaue Lösung schreibt sich zu

$$\mathbf{y}(t) = e^{\Delta(t) + \mathbf{F}t} \left\{ \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{-\Delta(\tau) - \mathbf{F}\tau} \mathbf{g}(\tau) d\tau \right\}. \quad (35)$$

c) Unsere (im Teil III) dargelegte Methode ist auch für den Sonderfall anwendbar, daß $\mathbf{G}(t) \equiv 0$, d. h. $\mathbf{H}(t) \equiv \mathbf{E}$, $\mathbf{B}(t) \equiv \mathbf{K}(t)$. Unser Ergebnis ist dann identisch mit dem anhand des Picard—Lindelöfschen Iterationsverfahrens ermittelten.

d) Betrachten wir schließlich den (für die Anwendungen besonders wichtigen) Fall, bei dem — unabhängig von t —

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}$$

und in der Form

$$\mathbf{G} = \sum_{\nu=1}^n \gamma_{\nu} \mathbf{u}_{\nu} \mathbf{v}_{\nu}^* \quad (36)$$

darstellbar vorausgesetzt ist. γ_{ν} sind hierbei die Eigenwerte von \mathbf{G} , \mathbf{u}_{ν} bzw. \mathbf{v}_{ν}^* bezeichnen die rechts- bzw. linksseitigen Eigenvektoren von \mathbf{G} ; $\mathbf{v}_{\mu}^* \mathbf{u}_{\nu} = \delta_{\mu\nu}$ [3].

In diesem Fall kann der nach Formel (12) bestimmte Wert $\mathbf{M}_m(t)$ folgendermaßen ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m(t) = & \sum_{k_1=1}^n e^{\gamma_{k_1} t} \left\{ \mathbf{u}_{k_1} \mathbf{v}_{k_1}^* + \sum_{k_2=1, \substack{\nu \\ 0}}^n \int_0^t (\mathbf{v}_{k_1}^* \mathbf{K}(\tau_1) \mathbf{u}_{k_2}) e^{(\gamma_{k_2} - \gamma_{k_1})\tau_1} d\tau_1 (\mathbf{u}_{k_1} \mathbf{v}_{k_2}^*) + \right. \\ & + \sum_{k_2=1}^n \sum_{k_3=1, \substack{\nu \\ 0}}^n \int_0^t (\mathbf{v}_{k_1}^* \mathbf{K}(\tau_2) \mathbf{u}_{k_2}) e^{(\gamma_{k_3} - \gamma_{k_1})\tau_2} \int_0^{\tau_2} (\mathbf{v}_{k_2}^* \mathbf{K}(\tau_1) \mathbf{u}_{k_3}) e^{(\gamma_{k_3} - \gamma_{k_2})\tau_1} d\tau_1 d\tau_2 (\mathbf{u}_{k_1} \mathbf{v}_{k_3}^*) + \dots + \\ & + \sum_{k_2=1}^n \sum_{k_3=1}^n \dots \sum_{k_m=1, \substack{\nu \\ 0}}^n \int_0^t (\mathbf{v}_{k_1}^* \mathbf{K}(\tau_{m-1}) \mathbf{u}_{k_2}) e^{(\gamma_{k_2} - \gamma_{k_1})\tau_{m-1}} \int_0^{\tau_{m-1}} (\mathbf{v}_{k_2}^* \mathbf{K}(\tau_{m-2}) \mathbf{u}_{k_3}) e^{(\gamma_{k_3} - \gamma_{k_2})\tau_{m-2}} \dots \\ & \left. \dots \int_0^{\tau_2} (\mathbf{v}_{k_{m-1}}^* \mathbf{K}(\tau_1) \mathbf{u}_{k_m}) e^{(\gamma_{k_m} - \gamma_{k_{m-1}})\tau_1} d\tau_1 \dots d\tau_{m-2} d\tau_{m-1} (\mathbf{u}_{k_1} \mathbf{v}_{k_m}^*) \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

d₁) Dieser letzte Fall schließt auch den Sonderfall in sich ein, bei dem \mathbf{G} und \mathbf{K} konstante Matrizen sind, also nicht von der Veränderlichen t abhängen [4].

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht mit Hilfe der Matrizenrechnung die Lösung von Systemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten. Die Lösung ist für gewöhnlich nur dann in geschlossener Form darstellbar, wenn die Koeffizientenmatrix Diagonalform hat. Im allgemeinen Fall läßt sich die Lösung ausschließlich durch eine unendliche Matrizenreihe darstellen. Verfasser gibt ein Iterationsverfahren an, das als Verallgemeinerung der Picard—Lindelöfschen Methode angesehen werden kann. Die Näherungslösung ($m - 1$)-ter Ordnung wird in einer — auch für die praktische Rechnung zweckmäßiger Form — in Gestalt von Summen wiederholter Integrale skalarer Funktionen dargestellt. (Siehe Formel (37).)

Literatur

1. BODEWIG, E.: *Matrix Calculus*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.
2. SCHMEIDLER, W.: *Vorträge über Determinanten und Matrizen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1949.
3. EGÉRVÁRY, E.: On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, Szeged, Tom. XV, Fasc. 1, 1953.
4. BAJCSAY, P.—LOVASS-NAGY, V.: Ein Iterationsverfahren zur näherungsweise Lösung von Matrizendifferentialgleichungen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Bd. 39, Heft 1—2, 1959.

P. BAJCSAY, Budapest, XI., Sztoczek u. 2—4. Ungarn.

SOME QUESTIONS ON REACTIVE POWER AND REACTIVE CONSUMPTION

By

B. E. F. KARSA

Chair for Electrical Machines and Measurements, Polytechnical University, Budapest

(Received March 7, 1959)

According to the flowing of energy in alternating current systems we calculate with three different sorts of power.

The (active, real) power (p , P , Fig. 1) is a derivative of energy:

$$\frac{dW}{dt} = p = iu \quad \text{and} \quad P = \frac{1}{T} \int_u^T p dt \quad (1)$$

T being the duration of one cycle of the current or of the voltage.

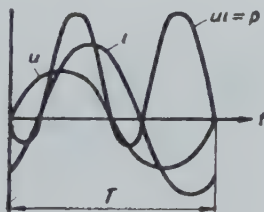


Fig. 1

The apparent power S is defined as rms value:

$$S = IU \quad (I \text{ and } U \text{ being rms values}) \quad (2)$$

The reactive power Q is defined by the equation

$$P^2 + Q^2 = S^2 = (IU)^2 \quad (3)$$

It should be mentioned here: the apparent power S as a physical quantity does not exist in the electrical circuit — it is a fiction.

As to the reactive power: first we may examine it in the exceptional case when there is no real power at all in the circuit (the case of ideal conden-

sers or of absolutely linear coils of self-induction, both without losses). The energy of a condenser or of a coil respectively is expressed (Fig. 2) by :

$$W_{0,c} = (U_{\max})^2 \frac{C}{2} \quad \text{and} \quad W_{0,s} = (I_{\max})^2 \frac{L}{2}$$

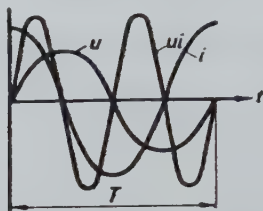


Fig. 2

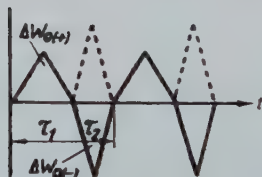
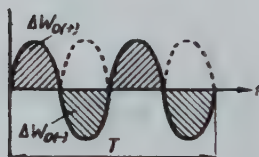
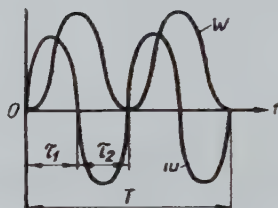


Fig. 3

further, the energy of the circuit for a multiple of a cycle of the voltage or of the current ($t = kT$) must be zero (Fig. 3):

$$\sum_{t=0}^{kT} \Delta W_{0,c} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{t=0}^{kT} \Delta W_{0,s} = 0 \quad (3a)$$

because the numerical values of the increase ($\Delta W_{0(+)}$) and of the decrease ($\Delta W_{0(-)}$) of energy by definition are equal. This shows that equations similar to equation (1) cannot be used for the definition of the reactive power Q .

As is generally known the reactive power Q (Fig. 3) is defined by

$$Q = \frac{\pi}{2} \frac{\sum |\Delta W_0|}{\sum \Delta t} = \frac{\pi}{2} \frac{2 W_0}{\tau_1 + \tau_2} \quad (3b)$$

τ_1 being the time during which the energy of the condenser (or of the coil) from zero increases to its maximum value, whereas during τ_2 its energy decreases to zero again. Or, if during one second the maximum energy W_0 does not change:

$$Q = \frac{\pi}{2} 4f W_0 = \omega W_0 \quad (3c)$$

The reactive power Q in this equation has nothing to do with real power or real energy just as the factor $\pi/2$ shows the equation is an arbitrary definition, it is merely a fiction.

Equations (3b) and (3c) are also applicable in general cases when in the circuit real power is also existing.

The above-mentioned maximum energy of a condenser or of a coil may also be defined by the "reactive power function" q :

$$W_0 = \left| \int_0^{\tau_1} q dt \right| \quad \text{being} \quad \left| \int_0^{\tau_1} q dt \right| = \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} q dt \right| = , , , \quad (3d)$$

Often the function q is mentioned as "the instantaneous value of the reactive power" which of course is not correct.

The definite integral of the function q for one cycle of the current or of the voltage must of course be zero:

$$\int_0^T q dt = 0 \quad (3e)$$

It is to be seen that the value Q of the reactive power is not expressed by the definite integral of the function q , contrariwise to the active (real) power (P, P).

The values P, Q and S are connected by the equations:

$$P = \lambda S \text{ and } Q = \kappa S \quad (\lambda = \text{power factor}) \quad (3f)$$

where $\lambda^2 + \kappa^2 = 1$ therefore $\lambda \leq 1$ and $\kappa \leq 1$
further

$$Q = \frac{\kappa}{\lambda} P$$

For the definition of the function q of the reactive power we first of all transform the function p of the active power to p^* which should have only positive values and its average value should not differ from $P = \lambda I U$. We find

$$p^* = \lambda \sqrt{2} I \sin \omega t \sqrt{2} U \sin \omega t = 2\lambda I U \sin^2 \omega t$$

Indeed the average value of p^* is

$$P^* = \frac{1}{T} \int_0^T p^* dt = \frac{2\lambda}{T} IU \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \lambda IU = P$$

Next we form the function q^* of the reactive power as the difference of both the real power functions p and p^* (Fig. 4) :

$$q^* = p - p^* \quad (3g)$$

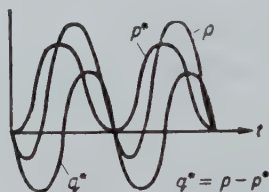


Fig. 4

This fulfils the requirements of equation (3e) :

$$\int_0^T q^* dt = \int_0^T (p - p^*) dt = T(P - P) = 0$$

We made no conditions concerning the current and the voltage ; their curves are generally not formed pure sine, they may contain higher harmonic components too, therefore the power p and the reactive power function q^* may also have higher harmonic components.

If the value $\kappa = \sqrt{1 - \lambda^2}$ is known, another function q^{**} may be formed :

$$\begin{aligned} q^{**} &= \kappa [\sqrt{2} I \sin (\omega t - \pi/2)] [\sqrt{2} U \sin \omega t] = \\ &= -\kappa 2 I U \cos \omega t \sin \omega t \end{aligned} \quad (3h)$$

This also fulfils the requirement (3e) as

$$\int_0^T q^{**} dt = -\kappa 2 I U \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0$$

The function q^{**} is of pure sine form, the absolute values $|Y|$ of its extreme values (co-ordinated to $t = T/8, 3T/8, 5T/8$ and $7T/8$) give the effective value Q of the reactive power:

$$|Y| = 2 \times IU \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \times IU = Q$$

and the absolute value of the function's average value for a quarter of a cycle is

$$\begin{aligned} \left| \frac{4}{T} \int_0^{T/4} q^{**} dt \right| &= \left| \frac{4}{T} \times 2 IU \int_0^{T/4} \cos \omega t \sin \omega t dt \right| \\ &= \frac{4}{T} \times 2 IU \frac{1}{\pi} \frac{T}{4} = \frac{2}{\pi} \times IU = \frac{2}{\pi} Q \end{aligned}$$

Of course the average value of the function for one cycle is zero.

The functions q^* and q^{**} should be compared.

If we succeed in subtracting in the load-circuit the reactive power q^* from the real power p , in this way we obtain the new real power function p^* . The latter has positive values only and in it the rms value of the current is diminished from its original value I to λI , so practically annulling any phase difference between current and voltage. *So the function q^* may be named a compensating one*, however, the value Q cannot be designated by it.

The application of the reactive power function q^{**} to the above described purpose leads only to an approximate compensation as

$$p - q^{**} \leq p^*$$

but in the function q^{**} the characteristic value Q of the reactive power can be pointed out precisely.

Both the functions q^* and q^{**} are expressed and bound to reality by rms values of current and of voltage, q^{**} being of pure sine form, q^* in general having higher harmonic components too. *Neither of the reactive power functions for an immediate measurement is accessible.* Which of them should be chosen for practical use can be decided only after a closer discussion of the circumstances in three phase circles.

The task of the measurement of the three sorts of power leads to further conclusions.

As is generally known the real power can be properly measured by means of electrodynamical or electrostatical wattmeters. The function p may be recorded by an electrodynamical oscillograph.

The apparent power S as a physical quantity does not exist in the electric circuit and so cannot be measured. However, we can generate and measure a real power P_s numerically equal to the apparent power: we must only insert (Fig. 5) an electrodynamical comparator and so transform current J_1 of the circle to current I_1 synchronous to voltage U (J_1 is generated by voltage U through the regulated resistance R). The balance of the comparator shows the equality of the currents:

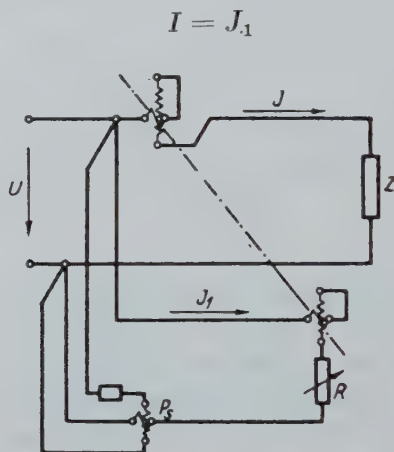


Fig. 5

in which case a wattmeter fed by U and J_1 measures the value

$$C a = P'_s = J_1 U = IU = S$$

Similar way must be chosen for measuring the reactive power Q : we have to generate and measure a real power numerically equal to the reactive power Q , because our wattmeters are able to measure real power only.

This task becomes a very simple one in the exceptional (nearly imaginary) case, if both current and voltage are of pure sine form:

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{and} \quad u = \sqrt{2} U \sin \omega t$$

in which case the instantaneous and the average values of the power are

$$p = iu = 2 IU \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t \quad \text{and} \quad P = IU \cos \varphi$$

therefore

$$\lambda = \cos \varphi \quad \text{and} \quad \varkappa = \sin \varphi$$

and in this exceptional case the value Q of the reactive power is

$$Q = \sin \varphi IU = IU \cos (\varphi - \pi/2) \quad (3i)$$

further the real power P_q sought for the above purpose will be described by the function

$$P_q = \sqrt{2} I \sin (\omega t + \varphi - \pi/2) \sqrt{2} U \sin \omega t \quad (3j)$$

In this case the real power P_q is numerically equal to the value Q of the reactive power to be measured. P_q might be generated by means of the actual current and voltage of the circle if, according to their mutual phase position we turn the current by 90 degrees in lagging or the voltage by 90 degrees in leading direction. It is not possible to imply any physical meaning into this turning of the phase angle, it only serves to make a calculation in an electromagnetic manner. However if the direction of this turning is consequently uniform, the sign of the so generated real power is the opposite in the case of inductive load to that of capacitive load.

If current and voltage are of pure sine form the "reactive power function" is found :

$$\begin{aligned} q &= \sin \varphi [\sqrt{2} I \sin (\omega t + \pi/2)] [\sqrt{2} U \sin \omega t] = \\ &= \sin \varphi 2 IU \cos \omega t \sin \omega t \end{aligned} \quad (3k)$$

In this case the equations (3g) and (3h) describe the same function as (3k) which may be demonstrated by substituting the values of the current and of the voltage into equation (3g).

The 90°-turning might be arranged in the circle of the current coil or of the voltage coil of the wattmeter by combining ohmic resistors with inductive reactances (HUMMEL, GÖRGES) or with capacitors (JÓBA). Of course the result depends on the frequency. Should the vector of the current be turned by 90°— δ instead of by 90°, the relative error is

$$h_q = \frac{\sin (\varphi + \delta) - \sin \varphi}{\sin \varphi} = \cos \delta + \operatorname{ctg} \varphi \sin \delta - 1$$

and the full error is

$$H_q = h_q IU \sin \varphi = IU (\sin \varphi \cos \delta + \cos \varphi \sin \delta - \sin \varphi)$$

If the angle δ is very small ($\delta \leq 4^\circ$), $\cos \delta \cong 1$, and the absolute value of the error is

$$H_q \cong IU \cos \varphi \sin \delta$$

The result of the 90°-turning is right when current and voltage are of pure sine form. *The described phase turning connections shall be applied in general cases too*, if current and voltage have higher harmonic components. Concerning the base-harmonic, the phase turning method leads to correct results, but there may failures occur concerning the reactive power of the higher harmonics (this errors though be less than the double of the apparent powers referred to).

Here the very interesting experiment of TRÖGER should be mentioned, who sought and found relations between the "swinging power" P_{sw} (energy swinging to and fro), real power P and reactive power Q . For pure sine form of current and voltage he found

$$P_{sw} = \frac{2}{\pi} P \operatorname{ev} |\varphi| \quad \text{and} \quad Q = P \frac{\lambda}{\kappa} = P \operatorname{tg} \varphi$$

so on the base of the measurement of P and P_{sw} may $\operatorname{ev} |\varphi|$, $\operatorname{tg} \varphi$ and Q be calculated. However, this method does not bring immediate results, so at present it only serves laboratory purposes.

In a three-phase circle in the phases 1, 2 and 3 the instantaneous values of current and voltage are

$$i_1 \quad i_2 \quad i_3; \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3$$

The instantaneous values of the real power are

$$p_1 = i_1 u_1; \quad p_2 = i_2 u_2; \quad p_3 = i_3 u_3$$

and their average values are

$$P_1 = \lambda_1 I_1 U_1 \quad P_2 = \lambda_2 I_2 U_2 \quad P_3 = \lambda_3 I_3 U_3$$

The power of the whole three phase circle is

$$P = p_1 + p_2 + p_3 \quad \text{and the average} \quad P = P_1 + P_2 + P_3$$

The apparent power is to be determined in each phase:

$$S_1 = I_1 U_1 \quad S_2 = I_2 U_2 \quad S_3 = I_3 U_3$$

The apparent power of the three-phase system cannot be defined by adding the values found in each phase of the circle.

The reactive power in each phase is defined by

$$Q_1 = \kappa_1 I_1 U_1 = \kappa_1 S_1 \quad Q_2 = \kappa_2 S_2 \quad Q_3 = \kappa_3 S_3$$

In general cases the reactive power of the three-phase system cannot be expressed by adding Q_1 and Q_2 to Q_3 .

In the exceptional case of ideal symmetry of supply and load, all the phase-quantities are equal:

the voltages $U_1 = U_2 = U_3$, the currents $I_1 = I_2 = I_3$, the power factors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ and $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa$ therefore

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_{ph}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_{ph} \text{ and } S_1 = S_2 = S_3 = S_{ph}$$

thus the power in the three-phase circle is

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 3 P_{ph}$$

further based on equation (3):

$$P_{ph}^2 + Q_{ph}^2 = S_{ph}^2 \text{ and } (3 P_{ph})^2 + (3 Q_{ph})^2 = (3 S_{ph})^2$$

So, in this exceptional case we get numerically correct result, if we consider the algebraic sum of the apparent powers in each phase as the apparent power of the three phase circle. We may apply the same method regarding the reactive power of the three-phase circle.

The real power in a three-phase circle might be properly measured by wattmeters the result being independent of the frequency, of the wave-shape and of the symmetry or asymmetry of supply and load.

The apparent power S in each phase of a three-phase circle may be measured by using comparators as described earlier.

The reactive power Q could be measured in each phase by the 90° phase turning, according to equation (3j). However, if the supply system is ideally symmetrical, one of the vectors of voltages in delta-connection is always perpendicular to one of the vectors of voltages in star-connection, and this circumstance may also be used for the 90° -phase turning. — Further, if supply system and load system are symmetrical and there is no zero line, the reactive power can also be measured by two wattmeters (similar to the Aron-connection), if the power indicated by one of the two instruments is taken into account with changed sign:

$$Q = \sqrt{3} (P''' - P')$$

If the 90° -turning is arranged in each phase by means of specially connected impedances, the result depends on the frequency, but not on the symmetry of the supply nor of the load. If the phase turning is carried out by the

above-mentioned delta star connection, the result does not depend on changes of frequency, nor on the asymmetry of the load, but is influenced by the asymmetry of the supply system. — The measurement with two wattmeters can only be correct if both supply and load are ideally symmetrical.

Our considerations should also be extended to the territory of consumption.

The electrical energy W which flows through a circle can be properly measured by an induction type meter according to equation

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} i \, u \, dt \quad (4)$$

The apparent consumption W_s (according to the apparent power S) should be measured according to equation

$$W_s = \sum_{t_1}^{t_2} S \Delta t \quad (5)$$

e.g. by an electrodynamical meter combined to an electrodynamical comparator, as described. — This task in three-phase systems is solved, within acceptable error limits, by the “trivector”, this specially constructed three-phase induction-type meter.

The reactive consumption W_q is defined by the equation

$$W_q = \sum_{t_1}^{t_2} Q \Delta t \quad (6)$$

and can be measured as the definite integral in time of a real power P_q numerically equal to Q . For this purpose we use the induction-type meters in the 90°-phase turning connection, as described above.

Here let us bring to mind that apparent power S and reactive power Q are based on rms values of current and voltage, they can be strictly interpreted only for whole cycles of voltage, so Δt in equations (5) and (6) may be a multiple of the time of one cycle only :

$$\Delta t = k T$$

k being an integer number.

Out of equation (3) follows :

$$(P^2 + Q^2) \Delta t = S^2 \Delta t$$

or, in summation

$$\sum_{t_1}^{t_2} P^2 \Delta t + \sum_{t_1}^{t_2} Q^2 \Delta t = \sum_{t_1}^{t_2} S^2 \Delta t \quad (6a)$$

but this equation does not connect the squares of the consumptions. For those is only valid :

$$\left(\sum_{t_1}^{t_2} P \Delta t \right)^2 + \left(\sum_{t_1}^{t_2} Q \Delta t \right)^2 \neq \left(\sum_{t_1}^{t_2} S \Delta t \right)^2$$

or

$$W^2 + W_q^2 \neq W_s^2 \quad (6b)$$

and if, $W = \Lambda W_s$ and $W_q = K W_s$, so

$$\Lambda^2 + K^2 \neq 1. \quad (6c)$$

The expression (6b) has an energetical base : the apparent power S can have positive values only and their summation in time always means the summation of positive values. The real power P can change its sign, so that energy W might be expressed by summation in time of positive and negative parts — the circumstance being possible for the reactive power Q and reactive consumption W_q . So it may happen that for a time interval the apparent consumption W_s amounts to a considerable value, but the sum of energy W and of reactive consumption W_q may be small or even zero :

$$\sum_{t_1}^{t_2} S \Delta t \geq 0 \quad \text{but} \quad \sum_{t_1}^{t_2} P \Delta t \approx 0 \quad \text{and} \quad \sum_{t_1}^{t_2} Q \Delta t \approx 0$$

Thus in general cases

$$W^2 + W_q^2 < W_s^2 \quad \text{and} \quad \Lambda^2 + K^2 < 1 \quad (6d)$$

where Λ and K are average values valid for the time interval of the measurement.

A relation between the squares of the consumptions similar to equation (3) could only be correct, if the values of consumptions would be defined as rms values out of the squares of the values of the powers, in this form :

$$\begin{aligned} A_p &= (t_2 - t_1) \sqrt{\frac{\sum_{t_1}^{t_2} P^2 \Delta t}{t_2 - t_1}} \\ A_q &= (t_2 - t_1) \sqrt{\frac{\sum_{t_1}^{t_2} Q^2 \Delta t}{t_2 - t_1}} \\ A_s &= (t_2 - t_1) \sqrt{\frac{\sum_{t_1}^{t_2} S^2 \Delta t}{t_2 - t_1}} \end{aligned} \quad (6e)$$

but just the expression A_p for energy is physically false.

With the values given in (6e) we may write :

$$A_p^2 + A_q^2 = A_s \quad (6f)$$

we may use also the writing

$$A_p = A_A A_s \quad A_q = K_A A_s \quad A_q : A_p = K_A : A_A \quad (6g)$$

here A_A and K_A are average values connected by the equation

$$A_A^2 + K_A^2 = 1 \quad (6h)$$

In the exceptional case when current and voltage are of pure sine form, the above-defined values A of the consumptions may be connected by the equations

$$A_p = A_s (\cos \varphi)_{\text{aver}} \quad \text{and} \quad A_q = A_s (\sin \varphi)_{\text{aver}}$$

therefore

$$A_q : A_p = (\text{tg } \varphi)_{\text{aver}}$$

It is not impossible to generate and measure the above-defined average values A_p , A_q and A_s of the consumptions, by transforming the angular velocity of the disk of the induction type meter to a proportional voltage (e.g. by some impulse method used in tele-measuring) and by integrating in time the square of this voltage using a meter adequate for this purpose. However, this method is complicated and very expensive with the only result that the functions defined in (6e) could be determined, the equation (6f) would be valide with the sure knowledge that the value A_p found for the energy is false.

There is one case when the mean values of the consumptions calculated from squares ("A") are equal to the consumptions calculated on linear base, namely, when during the whole measurement all the powers P , Q and S are unaltered :

$$P = \text{const} \quad Q = \text{const} \quad S = \text{const}$$

when therefore

$$\lambda = \text{const} = A \quad \text{and} \quad \kappa = \text{const} = K$$

in this case

$$W = A_p \quad W_q = A_q \quad W_s = A_s$$

and so in this case

$$\text{exceptionally! } W^2 + W_p^2 = W_s^2$$

The more the powers are changing, the more will the application of the last equation of the squares be unjustified — leading to intolerable errors in practical cases.

Our considerations may be summarized as follows.

1. Contrary to the measurement of the (real) power in a circuit by means of wattmeters, *the measurement of the reactive power according to its definition may depend:*

on the frequency,

on the wave-shape of current and voltage,

in three-phase circuits it may depend also on the symmetry or asymmetry of supply and load.

2. It was stated that the addition of the squares of the powers by definition leads to correct results, such an addition of consumptions W , W_q and W_s is not permitted, it may lead to rough errors.

3. It is important to establish that concerning the powers P , Q and S we can define and reasonably use the quantity “power factor” λ (respectively $\cos \varphi$) and its complementary κ (respectively $\sin \varphi$), concerning the consumptions we are not able to define an “average power factor”, so the best is not to speak of the “average $\cos \varphi$ ” nor of its complementary the “average $\sin \varphi$ ” and so we do not even wish to measure them.

We have to consider what are the advantages of the knowledge of apparent and reactive power and of apparent and reactive consumption for the electrotechnical practice.

Out of the value of the apparent power we may calculate how many times $(1/\lambda)$ is the current larger than it would be in the optimal case (when $\lambda = 1$) at the same real power P and voltage U . From this we can reliably judge the “superfluous” overload of the conductors which could be calculated as

$$\frac{I^2 - I_{\text{opt}}^2}{I_{\text{opt}}^2} = \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 - 1 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

The knowledge of the apparent power is also important because the electrical machines and transformers are constructed according to the apparent power — so its value characterizes the actual load demanded from the machines of the power station.

On base of the value and character (“sign”) of the reactive power, we can judge the excitation of the alternators in a power station and about the thermic state of their rotors.

The knowledge of the apparent and of the reactive consumption enables us to get a good estimation of the average development of the above-described phenomena during the measurement — this determines the importance of the measurement. Whereas the overload of the conductors causes excess of the losses, the overexcitation of a turbogenerator diminishes by its thermic effect the duration of life of the alternator's rotor — this being its most compactly constructed part, and also the mostly sensitive against overheating.

All we have stated according to energy-consumption, to apparent consumption and to the reactive consumption precautions us concerning these measurements. We have to measure the reactive consumption by means of two reactive-meters connected in opposition, fitted with reversal preventing devices, so that one of them measures the inductive reactive consumption, the other the capacitive one. The same method should be applied for the measurement of energy, if the reversal of the energy-flow is probable, or if it is only possible.

It is obvious that the measurement of the reactive consumption is connected with considerably more sources of error than the measurement of the energy. This circumstance was also appreciated in the international standardizations, as the error limits of the reactive meters are nearly the double of those of the induction-type energy meters. And so it is fair; reactive consumption should be measured mostly by large industrial consumers and these should be prepared technically to safely avoid the consumption-limits as are fixed by tariff.

The tariff-limits at present concerning the reactive consumption are graded according to values of the "average power factor". As this cannot be defined, nor measured, it seems to be equitable to substitute it by well-fixed values of the ratio of reactive consumption and of consumed energy, in accordance with the possibilities of the measurement.

Summary

Dealing with the definitions of apparent and reactive power and consumption the author shows that they do not exist as physical quantities, they are only fictitious, so their very important values cannot be measured but by substitution. He shows that the "power factor" may be defined for powers only, it is impossible to define it as an average value in time according to consumptions. — He deals with several sources of error in connection with the measurement of reactive power and consumption and points out the practical importance of the knowledge of apparent and reactive power and consumption — touches their role according to tariff.

BÉLA E. F. Karsa, Budapest, XI., Budafoki ut 8. Hungary.

ON LINEAR DIFFERENCE EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

L. FELDMANN

Polytechnical University, Budapest

(Received November 25, 1958)

In the recent years a book by ZYPKIN [2] was published about the difference equations of impulse and regulation technique. In this book, by using the so-called discrete Laplace transformation, an operational calculus for solving linear difference equations (and systems of difference equations) with constant coefficients was elaborated.

In this article we show a method for this difference equations which can be more easily treated and more generally applied than that of discrete Laplace transformation method. We are using MIKUSINSKI's method [4]. But in our treatment on operational calculus in connection with difference equations, the need of introducing abstract elements does not occur.

§ 1. Step functions and number sequences. Let n be a positive integer and $a(n)$ the value of $a(t)$ in $t = n$. ($a(n)$ may be also a complex number). $a(t)$ is called a *step function*, if

$$a(t) = a(n), \text{ if } n \leq t < n + 1 \quad (1)$$

$a(t)$ is called an *entrance function* if

$$a(t) \equiv 0, \text{ if } t < 0 \quad (2)$$

If $a(t)$ is a step function and if it is also an entrance function, it may be characterized by a number sequence $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, where the relation

$$a_n = a(t) \Big|_{t=n} \quad (2')$$

holds.

In the future we shall not make any difference between the step function $a(t)$ and the number sequence $\{a(n)\}$ characterizing it. We are able to do this, because the one to one correspondence also holds on operations (sum, product) and limes, which will be introduced in § 3.

We define the *translation* of the function $a(n)$ by k by the equation

$$a(n-k) = \begin{cases} 0, & \text{if } n < k \\ a_{n-k}, & \text{if } n \geq k. \end{cases} \quad (3)$$

On the other hand the function $a(n+k)$ is defined by the equation

$$a(n+k) = \begin{cases} 0, & \text{if } n < 0 \\ a_{n+k}, & \text{if } n \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Thus, the translation of $a(n+k)$ in positive direction by k does not lead to function $a(n)$.

§ 2. The difference equation and its solution. A k -th order linear difference equation with constant coefficients for the function $y(n)$ is

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) + \dots + a_k y(n+k) = f(n) \quad (5)$$

if $f(n)$ is a given function and a_0, \dots, a_k are given constants. The equation (5) has an unique solution, if the values of $y(n)$ are given at different k points, if — for example — the values

$$y(0) = y_0, \dots, y(k-1) = y_{k-1} \quad (6)$$

are given. A very simple method for obtaining the solution of equation (5) which satisfies the conditions (6) is the following :

Taking $n = 0$, we put the values from conditions (6) in the equation (5). In the second step, taking $n = 1$ and making use of the conditions (6) and the value y_k (already determined), we determine y_{k+1} , etc. However, in that way we do not get a formula for the function $y(n)$, but only values of $y(n)$ in $k, k+1, \dots$

In the following we modify the idea of the foregoing method, the substance of which was a successive translation in negative direction by $n, n+1, \dots$. In our method by one translation we immediately obtain a formula for $y(n)$.

§ 3. The structure k . In the class of step functions [characterized by equations (1) and (2)], we define the addition, the subtraction of functions, the product of a function and a complex number in the usual sense.

The *product of two functions* is determined by the equations

$$a(n) * b(n) = c(n)_n$$

where

$$c(n) = \sum_{k=0}^n a(n-k) b(k) \quad (7)$$

It can be shown, that

$$[a(n) * b(n)] * c(n) = a(n) * [b(n) * c(n)]$$

$$a(n) * b(n) = b(n) * a(n)$$

$$[a(n) + b(n)] * c(n) = a(n) * c(n) + b(n) * c(n)$$

Still, we define the limes:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{a_k(n)\} = a(n)$$

if, and only if, the convergence holds for each n .

Examples about the limes.

I. If $a(n)$ is an arbitrary function

and

$$a_k = t^k a(n)$$

where $t^k a(n)$ is determined by equation (9), then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

Since for arbitrary fixed n

$$t^k a(n) = 0 \text{ if } k > n$$

holds.

II. If

$$a_k(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq k \\ c^k & \text{if } n = k \end{cases}$$

we obtain, that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

for, if n is arbitrary fixed $a_k(n) = 0$, if $k > n$ (Though $c^k \rightarrow \infty!$).

The class of step functions characterized by equations (1) and (2) in which the operation and limes are defined in the foregoing manner is called structure k .

§ 4. Unit function. If we define the function e by equation

$$e = e(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$

then

$$e * a(n) = a(n) \qquad c_1 e \pm c_2 e = (c_1 \pm c_2) e$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (c_k e) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} c_k \right) e$$

hold for arbitrary function $a(n)$ and complex numbers c_1, c_2 . Therefore we may identify the function e with the number 1 and we write for a complex number c the identity

$$c \equiv c e(n) \tag{8}$$

§ 5. Translation function. If we define t by equation

$$t = t(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 1 \\ 1 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

the equations

$$t^2 = t(n) * t(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 2 \\ 1 & \text{if } n = 2 \end{cases}$$

$$t^k = t(n) * t^{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq k \\ 1 & \text{if } n = k \end{cases}$$

and

$$t^k(n) * a(n) = a(n-k) \tag{9}$$

hold, where $a(n-k)$ is defined by equation (3). From equations (9) and (4) we obtain

$$a(n) = t(n) * a(n+1) + a_0 \tag{10}$$

and

$$a(n) = t^k a(n+k) + t^{k-1} a_{k-1} + \dots + t a_1 + a_0 \tag{11}$$

where a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 are defined by equations (8) and (2').

From § 3. we derive that for every function $a(n)$ the following series development hold in terms of $t(n)$:

$$a(n) = a_0 + a_1 t(n) + \dots + a_k t^k(n) + \dots \tag{12}$$

where a_k is the value of $a(n)$ if $n = k$.

Hence

$$a(n) * b(n) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) t(n) + \dots + (a_k b_0 + \dots + a_0 b_k) t^k(n) + \dots \quad (13)$$

§ 6. Inverse function. If $a(n)$ is given, and we can find $b(n) \in K$ that

$$a(n) * b(n) = e(n) \quad (14)$$

then the sequence $b(n)$ is called the inverse function of $a(n)$.

Since from equation (14) we obtain for the first k elements of $b(n)$, that

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k &= 0 \end{aligned}$$

the necessary and sufficient condition of the existence in K of the inverse function of $a(n)$ is

$$a_0 \neq 0.$$

We denote the inverse function of $a(n)$ by $a^{-1}(n)$ or $\frac{1}{a(n)}$.

§ 7. Rational functions of t . It is known that every rational function can be written in the form of a sum of a polynomial and partial fractions δ . Therefore we can define every rational function of t by the following formulas.

$$a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n = \{a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots\} \quad (16)$$

$$\frac{1}{(1-ct)} = 1 + ct + \dots + c^k t^k + \dots = \{c^k\} * \dots \quad (17)$$

$$\frac{1}{(1-ct)^n} = \frac{1}{1-ct} \frac{1}{(1-ct)^{n-1}} = \left\{ \binom{n-1+k}{k} c^k \right\} \quad (18)$$

§ 8. The solution of a difference equation. From equations (10) and (11) follows that equation (5) is equivalent with the linear algebraic equation

$$(a_0 t^k + a_1 t^{k-1} + \dots + a_{k-1} t + a_k) * y(n+k) = f(n) + P_{k-1}(t)$$

* Since from equations (12) and (13) follows that $(1-ct)(1+ct+\dots+c^k t^k+\dots) = 1$.

where $a_k \neq 0$ and $P_{k-1}(t)$ is a polynomial of degree $k-1$ the coefficients of which can be computed from (6). Hence

$$y(n+k) = \frac{f(n) + P(t)}{a_0 t^k + \dots + a_k}, \text{ if } n \geq 0 \quad (19)$$

On the basis of formulas (16), (17), and (18) it can be shown that (19) is a function which belongs to K .

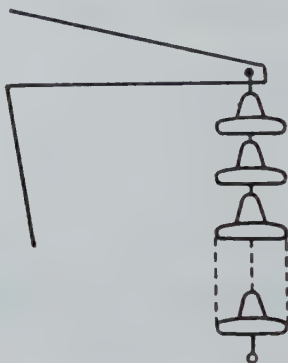


Fig. 1. The picture and the switch-on-picture of the high tension insulator

Observe that formula (19) can be applied for values $y(n)$, in the case $n \geq k$. Values of $y(n)$ in case of $n < k$ are given by the initial values (6).

§ 9. Examples.

I. Is given the difference equation

$$u(n+2) - u(n) = n!$$

with boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u(5) = 1$$

Solution: The corresponding algebraic equation is

$$(1-t^2)u(n+2) - tu(1) - u(0) = n!$$

hence

$$u(n+2) = \frac{n! + tu(1) + u(0)}{1-t^2}$$

Considering the identity

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right] = \frac{1}{2} \{1 + (-1)^n\}$$

and

$$t u(1) + u(0) = \{ -u(0), u(1), 0, 0, \dots \}$$

and the first boundary condition, we obtain

$$u(n+2) = \sum_{k=0}^n (n-k)! [1 + (-1)^k] + [1 - (-1)^n] u(1)$$

From the second boundary condition follows that

$$u(5) = \sum_{k=0}^3 (3-k)! [1 + (-1)^k] + \frac{1}{2} [1 - (-1)^3] u_1$$

hence

$$u_1 = u_5 - 7 = -6$$

Thus we obtain the *result*

$$u(n+2) = \sum_{k=0}^n (n-k)! [1 + (-1)^k] - 6 [1 + (-1)^n], \text{ if } n \geq 0$$

$$u(1) = -6, u(0) = 0$$

This example cannot be solved by ZYPKIN's method, since the function $n!$ has no Laplace transform.

II. A high-tension insulator consists of a sequence of unit insulators which are connected by conductors. The first of these unit insulators are connected to a grounded console. The last unit insulator is connected to a high tension conductor in which alternating current of frequency ω flows. (See [2] p: 40. and the figure.)

The problem is to give the potential drop between the n -th and $n+1$ -st unit insulator.

The potential in one unit insulator is constant. Thus — if we denote the capacity between two neighbouring members with C_1 and between the ground and the first unit insulator with C_2 — then the problem leads to the following difference equation :

$$u(n+2) - 2 \left(1 + \frac{C_2}{2C_1} \right) u(n+1) + u(n) = 0$$

$$u(0) = 0 \quad u(N) = u_L$$

where u_L is the potential drop between the last unit insulator and the ground.

Solution: Making use of the substitution

$$1 + \frac{C_2}{2C_1} = ch \tau \quad (20)$$

we obtain the linear algebraic equation [see (11)]

$$(1 - 2ch\tau \cdot t + t^2) u(n+2) - 2ch\tau u(1) + t u(1) = 0$$

From the identity

$$\frac{1}{1 - 2ch\tau \cdot t + t^2} = \frac{1}{e^\tau - e^{-\tau}} \left[\frac{e^\tau}{1 - e^\tau t} - \frac{e^{-\tau}}{1 - e^{-\tau} t} \right]$$

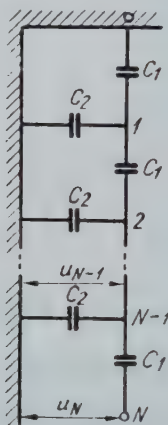


Fig. 2

and the equation (17), we get the formula

$$\frac{1}{1 - 2ch\tau \cdot t + t^2} = \frac{e^{\tau(n+1)} - e^{-\tau(n+1)}}{e^\tau - e^{-\tau}}$$

Hence follows that

$$u(n+2) = \frac{t - 2ch\tau}{t^2 - 2ch\tau t + 1} u(1) = \frac{e^{\tau n} - e^{-\tau n}}{e^\tau - e^{-\tau}} u(1) - \frac{(e^\tau + e^{-\tau})(e^{\tau(n+1)} - e^{-\tau(n+1)})}{e^\tau - e^{-\tau}} u(1) = \frac{e^{\tau(n+2)} - e^{-\tau(n+2)}}{e^\tau - e^{-\tau}} u(1),$$

$$u(N) = \frac{e^{\tau N} - e^{-\tau N}}{e^\tau - e^{-\tau}} u(1) \quad \text{if } N \geq 2$$

Thus the solution is (after replacing $n + 2$ by n)

$$u(n) = \frac{e^{\tau n} - e^{-\tau n}}{e^{\tau N} - e^{-\tau N}}.$$

Because

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{e^{\tau n} - e^{-\tau n}}{e^{\tau N} - e^{-\tau N}} = \frac{n}{N}$$

thus from (20)

$$u(n) = \frac{n}{N}$$

on small values of $C_2/2C_1$.

III. The grade of amplification in an amplifier with N members (see [2] p. 42). The problem leads to the following systems of difference equations:

$$\begin{aligned} z_1 i(n) + u(n+1) - u(n) &= 0 \\ z_2 i(n+1) - z_2 i(n) + u(n+1) + S z_2 u(n) &= 0 \end{aligned}$$

S, z_1, z_2 constants and

$$u(0) = u_G \quad i(N) = 0 \quad (22)$$

We show the method of solving only, without physical interpretation. The corresponding algebraic equation is (from (10))

$$\begin{aligned} z_1 t i(n+1) + (1-t) u(n+1) &= u_G - z_1 i(0) \\ z_2 (1-t) i(n+1) + (1 + S z_2 t) u(n+1) &= z_2 i(0) - S z_2 u_G \end{aligned} \quad (23)$$

hence

$$i(n+1) = \frac{z_2 [(1 - S z_1) i(0) t + S u_G - i(0)] + u_G}{-z_2 (1 - S z_1) t^2 + (z_1 + 2 z_2) t - z_2}$$

Making use of the substitutions

$$\sqrt{1 - S z_1} = A \quad (24)$$

and

$$\frac{1}{A} \left(1 + \frac{z_1}{2 z_2} \right) = ch \tau \quad (25)$$

we get the formula

$$i(n+1) = \frac{z_2 [A^2 i(0) t + S u_G - i(0)] + u_G}{-z_2 (A^2 t^2 - 2 A \operatorname{ch} \tau t + 1)}$$

where

$$A^2 t^2 - 2 A \operatorname{ch} \tau t + 1 = (1 - A e^{-\tau} t) (1 - A e^{+\tau} t)$$

Thus with the method of partial fractions and using (17) we obtain

$$\begin{aligned} i(n+1) = A^n \cdot \frac{z_2 [A i(0) e^{-\tau} + S u_G - i(0)] + u_G}{e^{-2\tau} - 1} e^{+\tau n} + \\ + A^n \frac{z_2 [A i(0) e^{\tau} + S u_G - i(0)] + u_G}{e^{-2\tau} - 1} e^{-\tau n} \end{aligned}$$

Considering the identities

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{2\tau} - 1} &= \frac{e^{-\tau}}{e^{\tau} - e^{-\tau}} \\ \frac{1}{e^{-2\tau} - 1} &= - \frac{e^{+\tau}}{e^{\tau} - e^{-\tau}} \end{aligned}$$

we get the more simple form

$$i(n) = A^n \left[\frac{(1 + z_2 S) u_G - i(0)}{A \operatorname{sh} \tau} \operatorname{sh} n \tau + i(0) \operatorname{ch} n \tau \right] \quad \text{if } n \geq 1. \quad (26)$$

Substituting $n = N$ in (26), from (22) we get $i(0)$.

Using (24) and (25), we express $i(n)$ by the z_1, z_2, S constants. We get $u(n)$ from the algebraic equation (23) also in the described manner.

§ 10. A restriction of the method. If $P_n(t)$ is the polynomial of the translation function and

$$P_n(0) = 0$$

we know from § 6, that $P_n(t)$ has no inverse in K . Thus if in case of a difference equation (or for a system of difference equations) the equivalent algebraic equation leads to a polynomial with the foregoing behaviour, the above method cannot be applied. However this restriction is not essential, because in practice such difference equation does not occur. On the other hand, precisely this condition makes possible the foundation of operational calculus without the introduction of abstract elements.

Summary

The paper contains a new operator calculus for solving linear difference equation (and systems of difference equations) with constant coefficients. It is more general and more simple, than those described in [2] or [3]. To illustrate the method, we give three examples. Two of them are difference equations from the impulse and regulation techniques, and the third can not be solved by the application of finite Laplace or Dirichlet transforms.

References

1. MIKUSINSKI, J. G.: Sur les fondements du calcul operatoire. *Studia Mathematica* **11** (1950) p. 41—70.
2. ZYPKIN, J. S.: Differenzengleichungen der Impuls-, und Regeltechnik. Verl. Techn. Berlin, 1956.
3. FORT: Linear Difference Equations and Dirichlet Transforms. *Amer. Math. Monthly* **62**, p. 641—645 (1955).
4. BELLERT, S.: On foundation of operational calculus. (*Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **5**, 855—858. p. (1957).

L. FELDMANN, Budapest, V., Szerb u. 23. Hungary.

ÜBER DIE WELTANSCHAULICHEN FRAGEN DER PHYSIK DER GEGENWART

Von
T. ELEK

— Zur 50. Jahreswende seit dem Erscheinen eines bedeutungsvollen
philosophischen Werkes. —

Fünfzig Jahre sind verflossen seit im Frühling 1909 in Moskau das Werk von *Wladimir Iljitsch Lenin* »*Materialismus und Empiriokritizismus*« erschienen ist, das den bescheidenen Untertitel »Kritische Bemerkungen über eine reaktionäre Philosophie« trug. Die Bedeutung des Leninschen Werkes ging jedoch weit über die Entlarvung und ideologische Vernichtung der empiriokritizistischen Philosophie hinaus. Diese hervorragende Schöpfung der materialistischen philosophischen Literatur hat auch aus der Perspektive eines halben Jahrhunderts seine Frische und Aktualität — sowohl vom philosophischen als auch vom naturwissenschaftlichen Standpunkt — beibehalten. Auch heute müssen wir einen scharfen Kampf gegen die aus den Ergebnissen der modernen Physik entstellten idealistischen Schlußfolgerungen führen und in diesem Kampf bietet uns Lenins Werk eine unschätzbare Hilfe.

Der Empiriokritizismus (Machismus), d. h. die philosophische Richtung der »Kritik der Erfahrung« ist in den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts entstanden. Ihre Begründer waren der Deutsche *Richard Avenarius* (1843—1896) und der Österreicher *Ernst Mach* (1830—1916). Mach war unbedingt die gewichtigere Persönlichkeit und genoß als namhafter Physiker große Autorität bei den Intellektuellen Europas. Er hat in der Physik auf dem Gebiet der Erscheinungen der Wellenbewegung und Dynamik der Gase, insbesondere hinsichtlich der Untersuchung der Bewegungen von größerer Geschwindigkeit als der Schall Bleibendes geschaffen. Seine wertvollen Ergebnisse wendet man noch heute in der Ballistik und der Technik der Gasturbinen-Flugzeuge an.

Doch Mach befaßte sich auch mit Philosophie und der hervorragende Physiker ist, wie viele seiner Zeitgenossen und Nachfolger weltanschaulich auf Abwege geraten. Seine Anschauungen legte er zuerst 1872 in dem Werk »*Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit*«, dem 1876 das Buch »*Philosophie als Denken der Welt, gemäß dem Prinzip des kleinsten Kraftmaßes*« von Avenarius folgte.

Seinen subjektiv idealistischen Standpunkt bezeugte Mach später in mehreren Werken, so z. B. in »*Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*« (1883), »*Analyse der Empfindungen*« (1885), »*Die Prinzipien der Wärmelehre*« (1900) sowie »*Erkenntnis und Irrtum*« (1905).

Der Empiriokritizismus geht — wie auch sein Name darauf hinweist — von dem Begriff der »Erfahrung« aus. Zwar unterzieht er diesen Begriff der Kritik, doch einer entstellten idealistischen Kritik. Unter »Erfahrung« verstehen Mach und seine Anhänger die »reine« psychische Erscheinung als die Gesamtheit der von der objektiven Wirklichkeit unabhängigen menschlichen Empfindungen. Die Empfindungen nannte Mach — um das Wesentliche zu verschleiern — »Weltelemente« und die Dinge »Elementenkomplexe«.

Seiner Ansicht nach ist es Aufgabe der Physikwissenschaft, die Gesetze der Zusammenhänge der Empfindungen und Wahrnehmungen aufzufinden. Die Physik muß also nicht die Gesetze der objektiven Realität, sondern die Zusammenhänge der vor sich gehenden psychischen Prozesse im menschlichen Bewußtsein erforschen.

Mach führte — wie Lenin darlegte — nicht überall konsequent diesen, Bischof *Berkeley* entlehnten subjektiven Idealismus durch. Als Physiker erkennt er manchmal an, daß unsere physikalischen Begriffe und Ideen den *Tatsachen* entsprechen, obwohl er hinzufügt, sie seien willkürlich vereinfacht.

Lenin betont jedoch, daß es sich hier nur von halben Kompromissen mit dem Materialismus handelt: *»An Stelle von Berkeleys konsequentem Standpunkt: die Außenwelt ist meine Empfindung — ergibt sich zuweilen der Standpunkt Humes: ich schalte die Frage aus, ob hinter meinen Empfindungen etwas ist.«* (W. I. Lenin, *Materialismus und Empiriokritizismus*, Moskau 1935, S. 54.)

Ähnliche halbe Kompromisse mit dem Materialismus enthielt die Theorie von Avenarius über die sogenannte »Prinzipialkoordination«. Seiner Auffassung nach existiert eine solche Koordination, eine solche Zueinanderbestimmung, die aus einem »Zentralglied« und einem »Gegenglied« besteht. Unter »Zentralglied« versteht Avenarius den Menschen (das Ich) und unter »Gegenglied« die Umgebung, und er stellt die eigenmächtige Behauptung auf, daß kein Glied der Koordination ohne das andere existieren kann, d. h. die Natur könne nicht ohne den Menschen bestehen. Diese Behauptung besagt nichts anderes, als daß es keine Außenwelt unabhängig vom menschlichen Bewußtsein gäbe, was wiederum mit dem Grundsatz des Berkeleyschen subjektiven Idealismus identisch ist. Die Wissenschaft jedoch hat bereits seit langem bewiesen, daß der Mensch als Ergebnis eines langen Entwicklungsprozesses der organischen Natur entstanden ist, daß also die Natur sehr wohl ohne Menschen zu existieren vermag. Avenarius versuchte dieses Problem zu umgehen, indem er erklärte, der Mensch habe diese Tatsache (daß die Natur vor dem Menschen bestanden hat) selber erkannt, d. h. nach Avenarius hat sich der Mensch selber in die Zeit vor dem Menschen »hinzugedacht« und deshalb existierte auch in jener Zeit das Zentralglied, zwar nicht als wirklich anwesend, sondern als sogenanntes »potentielles« Zentralglied. Auf diese wirklichkeitsfremde mystische Spekulation erwidert Lenin mit beißendem Hohn, daß wir auf dieser

Grundlage für die Existenz der Hölle damit argumentieren könnten, daß wir sie uns — zumindest als Beschauer »hinzudenken«.

Der subjektive Idealismus der Empiriokritizisten trat in jeder wichtigen Frage der Philosophie zum Vorschein. Man muß hinzufügen, daß sie mit den in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wuchernden übrigen subjektiv idealistischen Richtungen, so insbesondere mit den Neokantianern, den Positivisten und den Immanenzphilosophen in enger Verbindung standen.

Innerhalb dieses subjektiv idealistischen Chors der bürgerlichen Philosophie besaßen gegen Ende des vergangenen Jahrhunderts die Machisten, die Empiriokritizisten, das führende Wort. Das ist verständlich und war durch Machs Autorität als Physiker bedingt. Wenn ein Physiker von Format, wie Ernst Mach es war, solche Prinzipien verbreitet, *es gäbe in der Natur weder Ursache noch Folge*, in der Welt bestehe keine objektive Notwendigkeit und was wir Naturgesetz nennen, sei lediglich — wie Mach es formulierte — die Einschränkung der Erwartung, man könne weder die Richtigkeit des Standpunktes des Determinismus noch die des Indeterminismus beweisen, — so ist das zweifellos von einschneidenderer Wirkung auf die Wissenschaftler und die gesamte Intelligenz, als wenn die gleichen Prinzipien aus der Feder eines schrullenhaften idealistischen Professors der Philosophie stammen. Es fällt schwerer ins Gewicht, wenn der Physiker Mach behauptet, daß Raum und Zeit wohlgeordnete Systeme von Empfindungsreihen sind, daß also (wie Mach sagte) die Auffassung der klassischen Physik vom objektiven Charakter von Raum und Zeit sinnlos erscheint, — als wenn man die gleiche Erklärung aus den Worten des vor hundert Jahren lebenden Kant und der neokantianischen Philosophen zur Kenntnis nehmen würde. Eine größere Verwirrung in den Köpfen verursacht, wenn der Physiker Mach aus der Erkenntnistheorie die Praxis als Kriterium der Erkenntnis verbannt, indem er erklärt, daß wir den Schein auf keine Weise von der Wirklichkeit zu unterscheiden vermögen und deshalb »die oft gestellte Frage, ob die Welt wirklich ist oder ob wir sie bloß träumen, gar keinen wissenschaftlichen Sinn hat«, als ob dasselbe Bischof Berkeley verkündet. (a. W. S. 131.)

Der Empiriokritizismus hat am ausgehenden 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts besonders unter den Intellektuellen in ganz Europa starken Anklang gefunden. Seine Verbreitung wurde von der damals in der Physik vor sich gehenden Revolution gefördert, die die bis dahin herrschende mechanisch-materialistische Anschauung über Bord warf und einzelne Physiker — die den dialektischen Materialismus nicht kannten — in die Sackgasse des subjektiven Idealismus stieß. Die Entdeckung der elektromagnetischen Wellen, der Kathoden- und Röntgenstrahlen sowie der Radioaktivität hat jene mechanisch-materialistischen Behauptungen unhaltbar gemacht, wonach organische Bestandteile des Begriffs der Materie, wie z. B. die kompakte Struktur, die Undurchdringlichkeit und die konstante Masse seien.

Beispielsweise erwies sich, daß die Elektronen ihre Masse zusammen mit ihrer Geschwindigkeit ändern. Wenn ihre Geschwindigkeit zunimmt, nimmt auch ihre Masse zu, d. h. je schneller sie sich bewegen, um so besser widerstehen sie der weiteren Erhöhung der Geschwindigkeit. Der Physiker *Kaufmann* hat bereits 1901 experimentell festgestellt, daß dieser Zusammenhang durch folgende Gleichung ausgedrückt wird :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In der Formel bedeutet m die Masse des Elementes, v die Geschwindigkeit des Elektrons, c die Lichtgeschwindigkeit, und m_0 »ruhende Masse« des Elektrons. Auch aus dieser Formel ist ersichtlich, daß wenn sich die Geschwindigkeit des Elektrons erhöht, auch seine Masse zunimmt ; wenn jedoch seine Geschwindigkeit sinkt, sich auch seine Masse verringert. Die Richtigkeit dieses Zusammenhanges wurde später auch durch die Relativitätstheorie verstärkt.

Aus der Tatsache, daß infolge des Geschwindigkeitsabfalls auch die Masse des Elektrons abnimmt, sind einzelne Physiker zu der Schlußfolgerung gelangt, daß »die Materie verschwunden ist«. Zum Beispiel erschien 1906 das Buch »*Wissenschaft und Hypothese*« des berühmten französischen Physikers *Henri Poincaré*, das 1908 von der ungarischen »Naturwissenschaftlichen Gesellschaft« auch in ungarischer Sprache herausgebracht wurde und das eine bedeutende ideologische Wirkung auf mehrere Generationen der ungarischen Geistes-schaffenden ausgeübt hat. Das letzte Kapitel des Werkes (*»Die Vernichtung der Materie«*) widerspiegelt in charakteristischer Weise die weltanschauliche Krise des Naturwissenschaftlers, der von dem mechanischen Materialismus enttäuscht ist, doch den dialektischen Materialismus nicht kennt und deshalb in der Sackgasse des Idealismus herumirrt. Poincaré sagt unter anderem in diesem Kapitel, daß *ein wesentliches Kennzeichen der Materie die Masse, die Trägheit sei* und meint im Weiteren, daß *wenn man beweisen würde, daß diese Masse, diese par excellence konstante Menge eigentlich auch selber Änderungen durchmache, wir dann wahrscheinlich mit Recht sagen dürften, die Materie existiere nicht*.

Poincaré benutzt hier deshalb die Bedingungsform, weil er noch hofft, daß die Kaufmannschen Experimente, die diese Gleichung und die aus ihr gezogenen Konsequenzen bestätigen, sich nicht bewahrheiten werden. In dem letzten Satz seines Buches meint er, *diese Experimente seien heikle Experimente und es wäre verfrüht, bereits heute die endgültigen Konsequenzen zu ziehen*. Diese »heiklen« Experimente jedoch hat man seither unzähligmal wiederholt,

die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit ist eine völlig bewiesene Tatsache, die Materie ist aber trotzdem nicht verschwunden, allenfalls ist der instinktive Glaube einzelner Physiker an die Existenz der Materie verschwunden.

Zu den Vertretern der damals entstehenden Richtung des »physikalischen« Idealismus gehörten außer Mach und Poincaré der Belgier *Duhem*, der Engländer *Pearson*, der Russe *Schischkin* und andere mehr. Die nüchtern denkenden Physiker traten natürlich schon damals gegen den Machismus auf, so z. B. die Deutschen *Boltzmann* und *Max Planck* (der Schöpfer der Quantentheorie), der Engländer *Rücker* und andere.

Auch in Ungarn erkannten einige Denker, daß der Machismus eine die Entwicklung der Wissenschaft hemmende falsche Philosophie ist. Der Physikprofessor *Alajos Baumgartner* verwarf in den Schlußsätzen seiner im Jahre 1913 erschienenen Arbeit »*Die Geschichte der Physik*« die Machsche Auffassung, nach der — wie Baumgartner zusammenfaßte — *es keine andere Realität gibt, als die eigenen Gefühle und jede Naturwissenschaft letzten Endes nur die ökonomische Anpassung unserer Gedanken an unsere Gefühle ist. . . Als Kompaß für den Fortschritt der Zukunft sollten wir eher die Worte von Max Planck beherzigen, nach dessen Meinung das Ziel nicht die völlige Anpassung unserer Gedanken an unsere Gefühle ist, sondern die völlige Unabhängigmachung des physikalischen Weltbildes von der Persönlichkeit des schöpferischen Geistes.*

In diesem Zusammenhang dürfen wir den Namen des ungarischen Sozialdemokraten *József Diner-Dénes* nicht vergessen, den Lenin lobend im Einführungsteil des V. Kapitels im »*Materialismus und Empiriokritizismus*« erwähnte, obwohl er ihn wegen gewisser Inkonsequenzen auch kritisierte. *József Diner-Dénes* war ein sehr vielseitiger Mann: er erwarb ein Ingenieurdiplom und beschäftigte sich dann mit Physik, Chemie, Archäologie, Philosophie und Kunstgeschichte. Im Jahre 1906 erschien sein kunstgeschichtliches Werk »*Leonardo da Vinci und die Entwicklung der Renaissance*«, in dem er auf der Basis des historischen Materialismus die Epoche der Renaissance einer Analyse unterzog. Der Titel des von Lenin zitierten Artikels lautet »*Der Marxismus und die neueste Revolution in den Naturwissenschaften*« und wurde in der von den deutschen Sozialdemokraten in Stuttgart herausgegebenen Zeitschrift »*Die Neue Zeit*«, Jahrgang 1907 gebracht. In dieser Studie tritt *Diner-Dénes* den Machisten entgegen und erklärt, die neuen Erkenntnisse der Physik beweisen keineswegs die Richtigkeit des subjektiven Idealismus, sondern bestätigen den dialektischen Materialismus und die Feststellungen von Engels im »*Anti-Dühring*«.

Natürlich waren diese materialistischen Stimmen ziemlich vereinzelte Erscheinungen im ungarischen Geistesleben, für das ebenfalls das Auftreten der verschiedensten Abarten des subjektiven Idealismus, besonders des Neokantianismus und des Positivismus charakteristisch war. Die im Jahre 1901

gegründete ungarische Philosophische Gesellschaft war im Grunde eine Vereinigung der Positivisten. Fügen wir hinzu, daß selbst im Galilei-Kreis (die Vereinigung der fortschrittlichen ungarischen Studentenschaft) der Machismus und subjektive Idealismus eingedrungen ist: im Jahre 1913 gab der Galilei-Kreis zum erstenmal in ungarischer Sprache das Werk Machs »*Die Analyse der Empfindungen*« heraus.

Der in der Zeitschrift der deutschen Sozialdemokraten erschienene Artikel von József Diner-Dénes nahm nicht nur im ungarischen Geistesleben einen ziemlich isolierten Platz ein, sondern auch in der internationalen Arbeiterbewegung. Nach Engels' Tod drang die Philosophie des subjektiven Idealismus immer stärker in die Arbeiterbewegung ein und infizierte mehr und mehr deren theoretische Grundlagen. Das Abweichen von den *theoretischen* Grundlagen der marxistischen Philosophie beschwor auch in der *Praxis* des politischen und wirtschaftlichen Kampfes die Gefahr des Abschwenkens auf den Standpunkt der Bourgeoisie herauf. Zu jener Zeit erhob der *Bernsteinsche* Revisionismus das Haupt. Die Revisionisten verkündeten, man müsse den Marxismus auch auf dem Gebiet der Philosophie »unter Revision nehmen«, müsse ihn zum Beispiel von der Dialektik reinigen, die sie als ein »schädliches Erbe« von Hegel bezeichneten und traten mit dem Anspruch auf, die marxistische Philosophie — wie sie sagten — mit der neokantianischen sowie machistischen Philosophie »zu ergänzen«. Diesen Standpunkt vertraten unter anderen *Kautsky, Max Adler, Friedrich Adler, Renner, Vorländer*. Auf den gleichen Standpunkt stellten sich ebenfalls die meisten rechten oder zentristischen Ideologen der II. Internationale und das deutsche Presseorgan der Sozialdemokraten »*Die Neue Zeit*«, die sich immer mehr zu einem Organ der philosophischen Revisionisten und subjektiven Idealisten verwandelte.

In seinem Artikel »*Marxismus und Revisionismus*« (April 1908) betonte Lenin, daß in jenen Jahren *Plechanow* der einzige Marxist in der internationalen Sozialdemokratie war, der »an den unerhörten Plattheiten, die die Revisionisten zusammenredeten, vom Standpunkt des konsequenten dialektischen Materialismus Kritik übte«. (*Lenin, Ausgewählte Werke*, Bd. I, S. 73.)

Plechanows Kritik war aber nicht frei von gewissen Fehlern. Er erachtete die Verirrungen der philosophischen Revisionisten und innerhalb dieser, die der russischen Machisten, für nicht schwerwiegend, und deshalb war seine Kritik nicht genug scharf und konkret. Dabei geriet er in einigen Fragen mehr oder minder in die Fänge des Machismus. So erkannte er in der machistischen Bewertung des Begriffs der Erfahrung nicht dessen subjektiv-idealistisches Wesen und meinte, es habe in dieser Frage keinen Sinn, den Materialismus und Empirioskritizismus einander gegenüberzustellen.

Ein weiterer Fehler seinerseits bestand darin, daß er in dieser Diskussion eine Variation des Machismus unterstützte, und zwar die »*Theorie der Hieroglyphen*«. Laut dieser Theorie gleichen unsere Empfindungen und Wahrneh-

mungen überhaupt nicht den Gegenständen der Außenwelt, sondern sind lediglich konventionelle »Geheimzeichen«, Hieroglyphen, Symbole. Wegen dieser Fehler hat Lenin Plechanow — unter Anerkennung seiner Verdienste — scharf kritisiert. Unter solchen Umständen blieb die Vernichtung der empirio-kritizistischen Ideologie Lenin vorbehalten.

Fügen wir hinzu, daß die Lösung dieser Aufgabe immer unaufschiebbarer wurde, denn der Machismus drang auch in die russische Arbeiterbewegung immer tiefer ein. *Bogdanow* (1837—1928) hat bereits im Jahre 1901 ein machistisches Werk herausgegeben und ließ im Jahre 1904 sein Hauptwerk unter dem Titel »*Empiriomonismus*« erscheinen. In diesem Buch wollte er die marxistische Philosophie durch eine angeblich »neue« ablösen. Die Auffassung Bogdanows jedoch wich nur insofern von der Auffassung Machs und Avenarius' ab, daß er die Welt nicht als die Schöpfung des individuellen Bewußtseins, sondern als eine Schöpfung des »kollektiven Bewußtseins« betrachtete oder wie er es formulierte: Die Welt ist identisch mit der »sozial-organisierten Erfahrung«.

Schon im Jahre 1906 hat Lenin in seinen »*Philosophischen Notizen eines einfachen Marxisten*« Bogdanow wegen dieser Anschauungen angegriffen und er kritisierte ihn besonders darum, weil Bogdanow damals zu den Bolschewiki gehörte und er mit dieser Kritik Bogdanow auf den Pfad der marxistischen Philosophie zurückführen wollte. Dieses Leninsche Werk im Umfang von drei Heften ist leider verlorengegangen.

Der Machismus begann also in Rußland bereits vor der Revolution von 1905 um sich zu greifen, doch die Gefahr seiner Verbreitung gab besonders nach der Niederlage der Revolution von 1905—1907 Grund zur Besorgnis. Während der Stolypinschen Gegenrevolution waren die Bolschewiki schonungslosen Verfolgungen ausgesetzt. Die gegenrevolutionäre Welle hat — wie immer — auch in diesem Fall Schwankungen, Erschütterungen, Kapitulation vor der bürgerlichen Ideologie in die Reihen der weniger standhaften »Mitläufer« der Arbeiterbewegung hineingetragen, besonders unter einigen Intellektuellen. Damals trat die mystische abergläubische Richtung der »Gottsucher« und »Gottbildner« auf den Plan, und auch jene Bestrebungen verstärkten sich, daß die in der Revolution angeblich gescheiterte marxistische Philosophie mit den Ideen des Machismus »verbessert« werden müsse.

Die russischen Machisten schlossen sich unter Führung von Bogdanow zusammen. Auf der Insel Capri gründeten sie eine antibolschewistische Partei-schule. An dieser Organisation nahmen außer Bogdanow *Basarow*, *Lunatscharski* sowie die Menschewiki *Juschkewitsch*, *Walentinow* und andere teil. Die russischen Machisten gaben im Jahre 1908 eine Artikelserie unter dem irreführenden Titel »*Beiträge zur Philosophie des Marxismus*« heraus. Sie erweckten den Anschein, als ob sie die Philosophie des Marxismus erläuterten bzw. verbesserten.

Am 25. Februar 1908 äußerte Lenin seine tiefe Empörung über die Artikelserie in einem Brief an Gorki, der damals auf der Insel Capri weilte: »Nein, das ist kein Marxismus!« ruft er in seinem Brief aus und fährt fort: »Dem Leser zu beweisen, daß der 'Glaube' an die Realität der Außenwelt Mystik ist (Basarow), schamlos den Marxismus und den Kantianismus zu vermischen (Basarow und Bogdanow) und eine Abart des Agnostizismus (den Empiriokritizismus) zu verkünden — die Arbeiter 'religiösen Atheismus' und die 'Vergöttlichung' der höheren menschlichen Potenzen zu lehren (Lunatscharski), Engels' Lehre über die Dialektik als Mystik zu erklären (Berman), aus den Sumpfquellen gewisser französischer 'Positivisten', Agnostiker oder Metaphysiker zu schöpfen, daß sie der Teufel hole mit ihrer 'symbolischen Theorie der Erkenntnis' (Juschkevitsch)! Nein, das ist mehr als die Höhe.« (Lenin, Sämtl. Werke, Bd. 13, IV. Ausgabe, S. 415 russ.)

Auf diese Artikelsammlung kehrte Lenin im April 1908 in seiner Abhandlung »Marxismus und Revisionismus« zurück und hier kündigte er bereits in einer Fußnote an, daß er in einem besonderen Werk die im Kielwasser von Berkeley, Hume und Kant segelnde subjektiv-idealistische Philosophie der vermeintlichen »Verbesserer« der marxistischen Philosophie entlarven werde. Mit unerhörter Energie machte er sich ans Studium der gesamten russischen, deutschen, englischen und französischen machistischen Literatur. Selbst der Redaktion des Parteiorgans »Proletarier« vermochte er deshalb nicht genügend Zeit zu widmen. Er beklagte sich auch bei Gorki: »Ich vernachlässige die Zeitung wegen meiner philosophischen Trinksucht.«

Als er im April 1908 aus Genf auf die Insel Capri fuhr, um Gorki zu besuchen, traf er Bogdanow, Basarow und Lunatscharski und führte auch mündlich eine scharfe Diskussion mit ihnen. Im Mai 1908 begab er sich nach London und arbeitete einen Monat im British Museum an seinem Werk.

Es muß hervorgehoben werden, daß Lenin nicht von einem einer augenblicklichen Laune entsprungenen philosophischen Interesse geführt, das Studium der Philosophie und der theoretischen Physik in den Mittelpunkt seiner Tätigkeit gestellt hat, sondern um gerüstet die in der Verfälschung der marxistischen Philosophie auftretende Gefahr zurückschlagen zu können.

Im Sommer 1908 hielt Bogdanow in Genf einen philosophischen Vortrag, in dem er ebenfalls seine machistischen Ansichten auseinandersetzte. Auf Vorschlag Lenins richtete Dubrowinski, Mitglied des bolschewistischen Zentrums, zehn Fragen an den Referenten. Die Thesen der zehn Fragen hatt Lenin solcherart ausgearbeitet, daß Bogdanows Abweichung von der marxistischen Philosophie klar zutage kam (s. Lenin, Sämtl. Werke, IV. Auflage, Bd. 14, S. 3—4 russ.). Die völlige Entlarvung und ideologische Vernichtung der Machisten führte Lenin in seinem Werk »Materialismus und Empiriokritizismus« durch.

In den ersten drei Kapiteln zeigt Lenin anhand des grundlegenden Problems der Philosophie und der mit ihm am engsten verbundene Fragen,

daß die marxistische Philosophie und der Empiriokritizismus miteinander unvereinbar sind, daß also die Bogdanowleute den Marxismus nicht »verbessern«, vielmehr ihn verfälschen. Der Reihe nach nimmt er die philosophischen Sätze der Machisten vor und beweist, daß jene angeblich »neuen« Formulierungen bei Mach, Avenarius und anderen, von denen Bogdanow und Genossen begeistert sind, im wesentlichen mit Berkeleys subjektivem Idealismus und Humes Agnostizismus identisch sind. Dadurch, daß Mach nun die Welt »Elementekomplex« anstatt wie sie Berkeley »die Kombinationen von Empfindungen« nennt, hat Mach noch keine »neue« Richtung in der Philosophie eröffnet, stellt Lenin fest, denn Mach selber erklärte im Vorwort zu seiner »Mechanik«, daß man seine berühmten »Weltelemente« gewöhnlich Empfindungen nennt.

In Verbindung mit den Empfindungen legt Lenin den Standpunkt des dialektischen Materialismus dar und betont, daß die Empfindung das *subjektive* Bild der *objektiven* Welt ist und wer in den Empfindungen den sich erschließenden objektiven Inhalt nicht anerkennt, wer die Empfindung, das Bewußtsein, als primär betrachtet, der wiederholt lediglich die Phrasen des allbekannten Idealismus.

Lenin zerpfückt auch die Avenariussche Theorie der »*Prinzipialkoordination*«, von der wir bereits oben gesprochen haben. Zwei hintereinander folgende Abschnitte im ersten Kapitel des Leninschen Werkes tragen die Überschrift: »*Hat die Natur vor dem Menschen existiert?*« und »*Denkt der Mensch mit dem Gehirn?*« Schon die Fragestellung zeigt, wie Lenin den Winkelzügen Schranken setzt, wie er die Empiriokritizisten überführt, daß sie mit ihrer Behauptung, der Gedanke existiere unabhängig für sich, primär, unabhängig vom Gehirn, unabhängig von der Materie, Verkünder des unverfälschten waschechten Idealismus sind.

Von solchen Behauptungen ist nur ein Schritt zu der These, daß der Gedanke durch irgendein übernatürliches Wesen von außen in das Gehirn des Menschen gesetzt wird — und damit stehen die Empiriokritizisten bis zum Hals im Fideismus, in der Religion, erläutert Lenin.

Er entlarvt auch den erkenntnistheoretischen Idealismus, daß heißt den Agnostizismus der Machisten. Er zitiert Mach, der selber erklärt hat, daß Kants »kritischer« Idealismus zwar sein Ausgangspunkt war, doch halte er Kant nicht für einen konsequenten Idealisten und deshalb wäre in der Erkenntnistheorie Hume sein Vorbild, derselbe Hume, der die Welt als die subjektive Erfahrung des Individuums qualifizierte, den objektiven Charakter unserer Kenntnisse, also die Existenz der objektiven Wahrheit, leugnete.

Was Bogdanows angeblich »neue« Formulierung anbetrifft, die Wahrheit sei die »*sozial-organisierte Erfahrung*«, so erhellt Lenin, daß diese im Grunde genommen identisch mit Humes Ansichten sei, denn die Meinung der Mehrheit der Menschen sei keineswegs ein Beweis für den objektiven Inhalt eines gege-

benen Gedankens. Auf dieser Grundlage könnte man ja auch die Existenz Gottes beweisen, denn in den Klassengesellschaften glaubt die Mehrheit der Menschen an Gott.

»Zu denken«, sagt Lenin, »daß der philosophische Idealismus dadurch verschwindet, daß man das individuelle Bewußtsein durch das Menschheitsbewußtsein oder die Erfahrung einer Person durch die sozial-organisierte Erfahrung ersetzt, ist genau dasselbe, wie wenn man glaubt, der Kapitalismus verschwinde, wenn man an Stelle eines Kapitalisten eine Aktiengesellschaft setzt.« (Lenin, Materialismus und Empiriokritizismus, Moskau 1935, S. 234.)

Indem Lenin im zweiten Kapitel den Agnostizismus der Empiriokritizisten aufdeckt und ihnen eine Abfuhr erteilt, setzt er klar den Standpunkt der marxistischen Philosophie über dem objektiven Charakter der Wahrheit auseinander, sowie daß die Erkenntnis der Wahrheit ein langwieriger historischer Prozeß ist und deshalb die Wahrheit immer insofern relativ ist, inwiefern sie nicht die volle Wirklichkeit widerspiegelt, nicht vollendet, nicht komplett ist. Gleichzeitig besteht die absolute Wahrheit insofern sie richtig, zuverlässig einen Teil der Wahrheit widerspiegelt,

Weiterhin befaßt sich Lenin mit der Wichtigkeit der Praxis als erkenntnistheoretisches Kriterium und erteilt Mach eine klare Antwort auf dessen Klagen, daß der Schein die Dinge oft nicht so wiedergibt, wie sie in Wirklichkeit sind. Indem Lenin hier Engels zitiert, unterstreicht er, daß die *Erfolge unserer Handlungen* doch kraft der Erfahrung für die Übereinstimmung unserer Wahrnehmungen mit der gegenständlichen (objektiven) Natur der wahrgenommenen Dinge den Beweis liefern und daß ihre Erkenntnis nicht an der Oberfläche der Dinge Halt macht, vielmehr sie auch in deren tieferliegendes Wesen eindringt.

Im III. Kapitel setzt er die Entlarvung des Machismus als einer mit dem Marxismus unvereinbaren Philosophie fort und zeigt auf, daß der Machismus den stofflichen Charakter der Welt leugnet; innerhalb dieses Rahmens leugnet er die Objektivität des kausalen Zusammenhangs, weiterhin die Objektivität von Raum und Zeit. Die Kant-Machsche Formel, wonach »der Mensch der Natur die Gesetze gibt«, nicht aber die Natur dem Menschen, ist letzten Endes ebenfalls eine Formel der Religion, des Fideismus, sagt Lenin. Außerdem beweist er, daß die Leugnung der objektiven Realität von Raum und Zeit der mystischen Theorie der Räume von mehr als drei Dimensionen Tür und Tor sperrangelweit öffnet und damit wiederum den Theologen und den Spiritisten einen Dienst erweist.

Im IV. Kapitel stellt Lenin den Empiriokritizismus an seinen Platz in der Philosophie und legt dar, daß die hochtrabende Richtung lediglich eine recht unbedeutende belanglose Schule des subjektiven Idealismus ist.

Besonders wichtig ist für uns das V. Kapitel des Leninschen Werkes, in dem er die falschen Ansichten des »physikalischen« Idealismus zerschlägt,

wobei er eine materialistische Zusammenfassung aller jener wichtigen Ergebnisse gibt, die die Physik am Ende des vorigen und zu Beginn des 20. Jahrhunderts erreichte.

In diesem Kapitel erläutert Lenin, daß die erkenntnistheoretischen Wurzeln des physikalischen Idealismus mit einigen gewissen Tendenzen des Fortschritts der Wissenschaft verknüpft sind, so beispielsweise mit den Widersprüchen der Realität, die von einem immer größeren Kreis erkannt werden, sowie mit der immer mehr fortschreitenden »Mathematisierung der Physik«. Die Revolution der Physik ging nämlich Hand in Hand mit einem bisher alles übertreffenden Eindringen der Mathematik in das Gebiet der Physik. Während die Bewegungsformeln der klassischen Mechanik relativ leicht beschrieben und mit mechanischen Modellen einfach veranschaulicht werden konnten, gelang das bei den Gleichungen der modernen Physik nicht. Ohne unserer Vorstellung zu helfen, spiegeln diese Gleichungen in ihrer Abstraktheit — wie beispielsweise die Maxwellschen Gleichungen — als relativ selbständige theoretische Mittel die gegebenen komplizierten physikalischen Prozesse wider. Die zum Idealismus neigenden Naturwissenschaftler haben daraus die irrige Konsequenz gezogen, daß diese Gleichungen bar jedes objektiven Inhaltes sind, daß — wie sie sagten — »*die Materie verschwindet, es bleiben nur Gleichungen*«. Sie vergessen jedoch, daß der Geist des Wissenschaftlers die Differentialgleichungen der Mathematik nicht aus subjektiver Eigenmächtigkeit hervorgebracht hat, sondern auf dem Wege der theoretischen Verarbeitung der aus der objektiven Realität geschöpften Erfahrungen. Maxwells I. Gleichung z. B. widerspiegelt in der abstrakten Sprache der Mathematik den *objektiven* Prozeß, daß die Änderung des die Leitung durchfließenden elektrischen Stroms und des zwischen den Kondensatorplatten zustande kommenden Verschiebungs-Strom (letzten Endes also des elektrischen Kraftfeldes) ein magnetisches Feld ergibt. Und die II. Maxwellsche Gleichung drückt ebenfalls den *objektiven* Prozeß aus, daß die Änderung des magnetischen Kraftfeldes in einer geschlossenen Leitung elektrischen Strom induziert bzw. letzten Endes die Änderung des elektrischen Kraftfeldes hervorruft. Die Differentialgleichungen der theoretischen Physik sind also keine willkürlichen Gedankenkonstruktionen, sondern die zur Beschreibung einiger komplizierter Vorgänge der objektiven *materiellen* Welt herausgebildete Mittel. An dieser Feststellung ändert auch der Umstand nichts, daß man in einzelnen Fällen aus diesen Gleichungen auf dem Wege reiner mathematischer Deduktion die Existenz solcher Erscheinungen (z. B. aus den Maxwellschen Gleichungen die Existenz der elektromagnetischen Wellen) ableiten kann, die die Wissenschaft durch Beobachtung bis dahin nicht erschlossen hat.

Lenin betonte, daß die Physiker — wenn sie die Krise ihrer Wissenschaft überwinden wollen — mit dem subjektiven Idealismus radikal brechen müssen, doch ebenso müssen sie mit dem mechanischen Materialismus brechen, zu dem

sie instinktiv neigen, und sich dem dialektischen Materialismus zuwenden, zu dem die Ergebnisse der modernen Naturwissenschaft sowieso unvermeidlich führen. In dieser Diskussion hob Lenin die Notwendigkeit hervor, den *philosophischen Begriff der Materie* von ihren konkreten Erscheinungsformen zu unterscheiden. Er erklärte, daß der Begriff der Materie nichts anderes bedeute, als die von unserem Bewußtsein unabhängig existierende und von ihm abgebildete objektive Realität! In diesem Zusammenhang geht Lenin auch auf die Frage »die Materie verschwindet« ein: »*'Die Materie verschwindet' heißt: es verschwindet jene Grenze, bis zu welcher wir bis dahin die Materie kannten, unsere Kenntnis reicht tiefer; es verschwinden solche Eigenschaften der Materie, die früher als absolut, unveränderlich, ursprünglich gegolten haben (die Undurchdringlichkeit, die Trägheit, die Masse usw.) und die sich nunmehr als relativ, nur einigen Zuständen der Materie eigen entpuppen. Denn die einzige 'Eigenschaft' der Materie, an deren Anerkennung der philosophische Materialismus geknüpft ist, ist die Eigenschaft, objektive Realität zu sein, außerhalb unseres Bewußtseins zu existieren.*« (Lenin, a. W., S. 268.)

Hinsichtlich der nunmehr mit der Mathematisierung der Physik zusammenhängenden Zweifel muß die Frage folgendermaßen gestellt werden: Sind die Erscheinungen des elektromagnetischen Kraftfeldes und des Mikrokosmos objektiv? Auf diese Frage gibt die Naturwissenschaft eine eindeutige Antwort: Jawohl, diese Erscheinungen existieren außerhalb unseres Bewußtseins und unabhängig von uns, wir studieren und beeinflussen sie. Das elektromagnetische Kraftfeld sowie die Mikroteilchen sind also *materielle* Erscheinungen, spezielle Erscheinungsformen der Materie. Was jedoch die Frage anbetrifft, ob diese Erscheinungen durch veranschaulichende mechanische Modelle oder ohne veranschaulichende Erklärung in Form mathematischer Gleichungen darzustellen sind, so vermag keine der Lösungen auch nur im geringsten Maße ein Argument zur Leugnung ihrer Objektivität, ein Argument zugunsten der idealistischen Philosophie zu sein.

Lenin setzt hier also auseinander, daß jene Behauptung, »die Materie verschwindet, es bleiben nur Gleichungen« vom philosophischen Standpunkt sinnlos ist, identisch mit der idealistischen Behauptung, daß die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes und des Mikrokosmos willkürliche Schöpfungen unseres Geistes sind, daß diese Erscheinungen im objektiven Sinne entweder überhaupt nicht existieren oder höchstens nur sekundär als Produkte unseres Bewußtseins. Der Umstand jedoch, daß die Richtigkeit der mathematisch abgeleiteten Zusammenhänge in der objektiven Realität oft erst nachträglich bewiesen wird, widerspricht absolut nicht dem materialistischen Leitsatz, daß die Materie das Primäre und das Bewußtsein das Sekundäre ist, ja gerade im Gegenteil: er bestätigt die Richtigkeit der Widerspiegelung, den ursprünglich objektiven Charakter unserer Kenntnisse und ermöglicht die wissenschaftliche Voraussicht sowie die Änderung der objektiven Realität.

Wie wichtig die genaue Definition des dialektisch materialistischen Begriffs der Materie in Lenins Werk »Materialismus und Empiriokritizismus« war, hat sich in dem seit dem Erscheinen des Buches vergangenen halben Jahrhundert noch klarer erwiesen. Bekanntlich schritt die Revolution der Physik während dieser Periode vorwärts und keine Anstrengungen wurden gescheut, um aus den neuen Entdeckungen idealistische weltanschauliche Konsequenzen zu ziehen. Besonders gilt diese Feststellung für die heutigen physikalischen Idealisten in Verbindung mit solchen Erscheinungen, infolgeder derer die stofflichen Teilchen, die Korpuskeln, sich in einem bestimmten Grad zum elektromagnetischen Kraftfeld, in elektrische Wellen verwandeln, d. h. ihren Körpercharakter verlieren. Die moderne Physik erschloß diesen Prozeß. Wenn ein Teilchen seinen Körpercharakter verliert und sich in eine elektromagnetische Welle verwandelt, dann behaupten die Idealisten wiederum: es handelt sich darum, daß sich die Materie in irgend etwas »Unmaterielles« verwandelt, also ihrer Meinung nach handelt es sich hier wieder um das Verschwinden der Materie, um ihre Vernichtung.

Philosophisch lautet die Frage auch in diesem Falle unverändert: existiert jenes elektromagnetische Kraftfeld oder jene elektromagnetische Welle, die infolge von Verschwinden der Korpuskeln entstanden ist, außerhalb des menschlichen Bewußtseins oder nicht? Wenn sie außerhalb unseres Bewußtseins existiert, dann sind natürlich dieses Kraftfeld und diese Welle selber auch materieller Natur; in diesem Fall jedoch kann man im philosophischen Sinne nicht vom Verschwinden der Materie sprechen. Bei der Umwandlung der korpuskularen Materie in Kraftfeld oder Welle handelt es sich einfach darum, daß sich eine Form der Materie in eine andere umwandelt. Es handelt sich hier also überhaupt nicht um die »Dematerialisierung«, um das Verschwinden der Materie — genauso wie im Falle des umgekehrten Prozesses (wo die elektromagnetische Gamma-Strahlung als Welle verschwindet und an ihrer Stelle ein aus einem Elektron und einem Positron bestehendes Korpuskel-paar entspringt) keine Rede davon ist, daß Materie aus etwas Nichtmateriellem entstanden sei.

In den letzten 50 Jahren schritt die Eroberung der Physik durch die Mathematik weiter. Der mathematische Apparat der Quantenmechanik mit seiner Operator- und Matrixrechnung ist noch komplizierter und abstrakter als der zur Beschreibung des elektromagnetischen Kraftfeldes notwendige Apparat war. Dieser Umstand führte natürlich wieder zu einer Verstärkung der idealistischen Auffassung.

In seinem Buch »Die neuen Wege der Naturwissenschaften« (1934), das im Verlag Franklin auch in ungarischer Sprache erschienen ist, sagt Eddington, daß als Grundlage der Erscheinungen es nur gelungen sei, ein mit mathematischen Gleichungen verknüpftes System der Symbole hervorzubringen und daß sich darauf die physikalische Realität beschränke. Doch zwischen der Mathematik und

Physik besteht bis zum heutigen Tag dasselbe Verhältnis, wie Lenin es charakterisierte: In den Operatoren der Quantenmechanik, in deren »Eigenfunktionen« und »Eigenwerten«, in den Matrixen und Differentialgleichungen widerspiegeln sich ebenfalls bestimmte Zusammenhänge der objektiven Wirklichkeit, deshalb können wir sie zur Erkenntnis, Beeinflussung und Nutzung der Prozesse des Mikrokosmos anwenden.

Die entstellte Bewertung einzelner Ergebnisse der Atomphysik begünstigte auch die *agnostischen* Tendenzen. So führte beispielsweise der berühmte englische Physiker und Astronom *James H. Jeans* in seiner Studie »Das Weltbild der neuen Physik«, das 1945 von der Universitätsdruckerei gleichfalls in ungarischer Sprache herausgebracht wurde, unter anderem aus, daß *das Elektron nur in unserem Geiste existiere — und daß wir darüber nichts wissen, ob außerdem noch irgend etwas existiere, das die Idee des Elektrons in uns hervorbringe. Die Natur, die wir untersuchen, besteht nicht daraus, was wir bemerken — sagt Jeans — sondern aus unseren Wahrnehmungen.*

Ein anderer Physiker, der österreichische Professor an der Universität zu Innsbruck *Arthur March*, erklärt in seinem Buch »Natur und Erkenntnis« (1948): »Mit vollkommener Sicherheit kann jeder nur die Existenz seines Ichs behaupten, alles übrige könnte möglicherweise nur ein Traum sein, und in diesem Sinn stellt bereits der Glaube, daß eine von unserem Bewußtsein unabhängige Welt existiert, eine Hypothese dar.« (S. Arthur March: Natur und Erkenntnis, Wien, Springer-Verlag 1948, S. 11.)

Werner Heisenberg verkündet ebenfalls ähnliche Ideen in seinem Werk »Das Naturbild der heutigen Physik«: »Wenn wir Gegenstände unserer täglichen Erfahrungen beobachten, spielt ja der physikalische Prozeß, der die Beobachtung vermittelt, nur eine untergeordnete Rolle. Bei den kleinsten Bausteinen der Materie aber bewirkt jeder Beobachtungsvorgang eine grobe Störung; man kann gar nicht mehr vom Verhalten des Teilchens losgelöst vom Beobachtungsvorgang sprechen. Dies hat schließlich zur Folge, daß die Naturgesetze, die wir in der Quantentheorie mathematisch formulieren, nicht mehr von den Elementarteilchen an sich handeln, sondern von unseren Kenntnis der Elementarteilchen.« (S. Werner Heisenberg: »Das Naturbild der heutigen Physik, Rowohlt Hamburg 1957, S. 12.)

Es ist offensichtlich, daß Heisenberg hier (mit oder ohne Absicht) einerseits die wirre Avenariussche Theorie der »Prinzipialkoordination«, der Untertrennbarkeit von Natur und Mensch, andererseits die Unerforschbarkeit der Welt proklamiert.

Lenins Werk bietet uns auch bei der Widerlegung dieser agnostischen Ansichten eine ungeheure Hilfe: es erhellt, daß — im Gegensatz zur Meinung von Heisenberg — die Erkennbarkeit des Mikrokosmos vom erkenntnistheoretischen Standpunkt keine neuen Probleme aufwirft! Die Erkenntnis der Erscheinung des Mikrokosmos ist ebenso ein Vorgang des Aufeinanderwirkens von Objekt und Subjekt wie die Erkenntnis der Erscheinungen des Makrokos-

mos. Jede Beobachtung bedeutet einen »Eingriff« in den Verlauf der untersuchten Erscheinung, doch nur in dem Sinne, daß der Beobachter die *auch ohne das Vorhandensein des Subjekts* vor sich gehende Wechselwirkung der verschiedenen *objektiven* materiellen Prozesse anwendet. Die Instrumente in der Quantenmechanik werden auch dadurch anwendbar, daß in ihnen bestimmte *objektive* Ursachen immer dieselben *objektiven* Wirkungen hervorruufen — wie dies dem *Wesen* nach auch in der Natur von selber vor sich geht. Das Instrument verändert immer (sowohl im Makro- als auch im Mikrokosmos) den zu messenden Prozeß und gibt trotzdem Kunde über Vorhandensein und Maß jener quantitativen Zustandsgrößen, über die die untersuchte Erscheinung objektiv verfügt.

Selbstverständlich ist im Falle von qualitativ verschiedenen Erscheinungen nur die Messung von immer anderen Zustandsgrößen möglich. Man darf nicht in der Unvollkommenheit unserer Instrumente ein »prinzipielles Hindernis« dafür suchen, daß wir im Falle der Mikroteilchen von zweifacher (korpuskularer und Wellen-) Natur solche Zustandsgrößen nicht zu messen vermögen, wie ihn z. B. der Begriff »zu den gegebenen Ortskoordinaten gehörende Impuls« bei der mechanischen Bewegung widerspiegelt. Die Quantenmechanik operiert mit anderen Zustandsgrößen!

Die Wechselwirkung zwischen beobachteter Erscheinung und Meßeinrichtung ist bei den Erscheinungen des Mikrokosmos zweifellos viel größer als bei den Erscheinungen des Makrokosmos. Das jedoch ändert nichts an folgenden Tatsachen:

1. Die Wechselwirkung ist auch dann ein Aufeinanderwirken *objektiver* Prozesse, die in der Natur ohne Anwesenheit des Subjektes vor sich gehen.
2. Im Ablauf der Wechselwirkung kommen ebenfalls *notwendige* Zusammenhänge zur Geltung, wenn auch nicht in Form mechanischer Kausalität.
3. Auch in diesem Fall ermöglicht die Wechselwirkung, die Erscheinung kennenzulernen, wenn auch nicht in ihrer abstrakten »absoluten Reinheit« (wie sie übrigens in der Wirklichkeit gar nicht existiert).
4. All das wird auch von der Praxis bestätigt.

Die Unanwendbarkeit der mechanischen Zustandsgrößen bei der Beschreibung der Erscheinungen des Mikrokosmos kann demnach kein Argument für den subjektiven Idealismus, den Agnostizismus und Indeterminismus sein!

Die Entwicklung der physikalischen Wissenschaft — und dies muß betont werden — bestätigt voll und ganz jene Leninsche Prognose, daß die moderne Naturwissenschaft selber den dialektischen Materialismus hervorbringt. Das ist natürlich ein sehr schwerer und schmerzlicher Weg, doch auch in den kapitalistischen Ländern ist der Prozeß unaufhaltbar. Das Beispiel solcher ausgezeichneten Gelehrter wie *Langevin*, *Joliot-Curie*, *Bernal*, *de Broglie* und andere, beweist es. Langevin z. B. hat erklärt, er vermochte die Geschichte der Physik der letzten Jahrzehnte nur auf Grund des dialektischen

Materialismus zu verstehen. Louis de Broglie hat in einem aufsehenerregenden, im Jahre 1954 geschriebenen Artikel seine Stimme gegen die in der Physik zur Geltung kommenden »trüben Wellen« des Indeterminismus erhoben. Zweifelsohne trägt der im Geiste des Leninschen philosophischen Nachlasses geführte Kampf gegen den physikalischen Idealismus im großen Maße zu diesem Prozeß bei.

Wir würden einen schweren Fehler begehen, die Bedeutung der Leninschen Schrift lediglich auf dieses Gebiet zu begrenzen. Das ganze Werk und besonders das letzte VI. Kapitel macht uns darauf aufmerksam, daß wir bei jeder reaktionären Philosophie deren *gesellschaftliche Wurzeln* bloßlegen müssen, hinter den scheinbar abstrakten philosophischen Leitsätzen müssen wir die bürgerlichen Klasseninteressen suchen und entlarven und mit verdoppelter Wachsamkeit sind wir dazu verpflichtet, wenn es sich um eine Philosophie handelt, die die marxistische ideologische Einheit der revolutionären Arbeiterbewegung gefährdet. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Verkündung des den objektiven Charakter der Wahrheit abstreitenden, die Existenz der Kausalität, Notwendigkeit sowie Gesetzmäßigkeit leugnenden subjektiven Idealismus auf den Kampf der Arbeiterklasse zur Veränderung der Welt hemmend wirkt und deshalb objektiv bürgerlichen Interessen dient.

Wenn Lenin aufzeigt, daß Bogdanow den marxistischen Leitsatz verneint, daß das gesellschaftliche Sein das Primäre und das gesellschaftliche Bewußtsein das Sekundäre ist und daß er den historischen Materialismus durch die biologische und energetische Theorie der Gesellschaft ersetzen will, oder wenn Lenin Suworow entlarvt, der den Klassenkampf als eine antigesellschaftliche negative Erscheinung qualifiziert, und den Klassenfrieden zwischen Bourgeoisie und Proletariat predigt — spornt er uns damit nicht etwa aus einer Perspektive von 50 Jahren zu einem konsequenten Kampf gegen die bürgerliche Ideologie und insbesondere gegen den Revisionismus sowie gegen die für sie charakteristische subjektive idealistische Philosophie an?! Müssen wir nicht an die Vorbereiter der Konterrevolution von 1956 in Ungarn denken, wenn wir bei Lenin lesen: *»Eine immer raffiniertere Verfälschung des Marxismus, immer raffiniertere Unterschiebungen von antimaterialistischen Lehren an Stelle des Marxismus — das kennzeichnet den modernen Revisionismus in der politischen Ökonomie, in Fragen der Taktik, in der Philosophie überhaupt, in der Erkenntnistheorie ebenso wie in der Soziologie.«* (Lenin, Materialismus und Empiorkritizismus, S. 345.)

Bereits vor 50 Jahren ermahnte uns Lenin, uns nicht mit der Entlarvung des politischen Verrates der Revisionisten zu begnügen, sondern in die theoretische und philosophische Grundlage ihrer Richtung einzudringen, und nicht zu dulden, daß sie die Arbeiterbewegung weiterhin verseuchen!

Dr. T. ELEK Budapest, Műgyetem rakpart 3.

KRISE ODER KONJUNKTURZYKLEN

(KRITIK DER BÜRGERLICHEN ALLGEMEINEN DYNAMISCHEN THEORIE
DER KONJUNKTURSCHWANKUNGEN)

Von

J. KLÁR

I.

Wirtschaftsgeschichtlicher Hintergrund

Die Vorgeschichte der sich immerfort vertiefenden kapitalistischen Krisen der jüngsten Zeit, die Länder und ganze Erdteile erschüttern, reicht weit in die wirtschaftshistorische Vergangenheit zurück und ist mit dem Verlauf der gesellschaftlich-wirtschaftlichen Entwicklung untrennbar verknüpft.

Zum Verständnis und zur Analyse der Krisen der Gegenwart ist es somit unerlässlich, den *Hintergrund* zu kennen, sich die beständig wechselnden Bilder auf der Drehbühne der Wirtschaftsgeschichte — von den ersten bis zu den letzten — vor Augen zu halten, um in ihrer bloß scheinbaren Ähnlichkeit die in Wahrheit *voneinander stärkstens abweichenden* Eigenheiten, ihre bisherige gesellschaftlich-wirtschaftliche *Bedeutung* und die *Richtung ihrer künftigen Gestaltung* ermessen zu können. Die Verfolgung der Spuren dieser gesellschaftlich-wirtschaftlichen Entwicklung allein ist es, die uns den roten Faden finden läßt, der aus der fernen Vergangenheit zum richtigen Verständnis der Krisenprobleme unserer Zeit führt.

Selbst die einfache, schon in der Urzeit des Menschen bestandene Warenwirtschaft war »krisenanfällig« und einzelne Wirtschaftstheoriker glaubten, auch im antiken Hellas und Rom »Krisen« entdecken zu können.

Diese Art von Krisen hat jedoch mit den *Spekulationskrisen* des späten Mittelalters oder mit den *periodischen* Krisen der neuesten Zeit nichts gemein.

ENGELS setzt den *Wendepunkt* in das 15. Jahrhundert, in die Zeit, in der sich die einfache zur kapitalistischen Warenwirtschaft verwandelte. Im 17. Jahrhundert schufen — im Gefolge der Herrschaft des Handelskapitals — die Bankorganisationen des Kreditwesens, das Börsenspiel, die Spekulation und die ungezügelte Gewinnsucht die Voraussetzungen für die damaligen Geldspekulations- und Kreditkrisen.

Treffend schreibt der Lübecker Bürgermeister Brokes in seinem Tagebuch über die kommerzielle Krise in Lübeck zu Beginn des 17. Jahrhunderts,

wer sich »gewaltsam und hastig bereichert, wird in der Regel arm und falliert«.

Während des *Tulpenfiebers in Holland*, da man für eine einzige Tulpenzwiebel Liegenschaften im Werte von 2500 Gulden vergeudete, oder in den Zeiten der Aktienschwindelei des von Marx als »ansprechendes Gemisch eines Schwindlers und eines Propheten« bezeichneten JOHN LAW, auf dessen Initiative die Auflagen der familiär als »Mutter«-, »Tochter«- und schließlich als »Enkel«- und »Urenkel«-Aktien bekannten, stets neueren und jeder Grundlage entbehrenden, wertlosen Emissionen einander auf dem Fuße folgten, führten die in weiten Kreisen des Volkes mit der Reklametrommel künstlich aufgepeitschte Gewinnsucht, der mit einem unwirklichen Optimismus populär gemachte Tulpen- und Kolonialhandel und eine tolle Spekulation zum völligen Zusammenbruch.

Bringt ein harmloser Naturforscher 1554 aus Adrianopel Tulpenzwiebeln nach Mitteleuropa, so muß dies noch keineswegs einen so großen Erfolg der Tulpe in Holland zur Folge haben, daß es einem Heer geschickter Spekulanten gelinge, Hollands Wirtschaftsleben für Jahre hinaus zugrunde zu richten und für die zu phantastischen Preisen erworbenen, in Bälde jedoch wertlosen Blumenknollen Hunderttausende ihr Vermögen aufs Spiel setzen zu lassen.

Treibt der Sonnenkönig in Frankreich einen unerhörten Aufwand, der die Staatsschuld 1715 auf 3,5 Milliarden Livre anwachsen läßt, so muß daraus nicht unbedingt folgen, daß John Law die Finanzen des Königs in der Weise »ordne«, daß er Frankreich übervorteile und zugrunde richte, und daß er selbst, der mit 2,5 Millionen Livre in Paris eingetroffen war, mit 5 Millionen wertlosen Papiergeldes in der Tasche Frankreich verlasse.

Große Ähnlichkeit hiermit zeigt die als »Südsee-Schwindel«* bekannte Krise in England, die 1720 kulminierte und die gleichfalls durch eine Aktienschwindelei ausgelöst worden war, die die Staatsschuld zu ordnen versprach. Den Zusammenbruch vermochte selbst die Tatsache nicht zu verhindern, daß es der Herzog von Wales selber war, der die Würde eines Generaldirektors einer dieser gesetzwidrig gegründeten »Luft«-Gesellschaften (der Welsh Copper Company) übernommen hatte.

Der Bürger in Holland mußte mithin nicht zwangsläufig dem Tulpenfieber verfallen, und John Law in Frankreich sowie die »Südsee-Schwindler« in England hätten — sofern sie klug und ehrlich die geschäftlichen Möglichkeiten ihrer besonderen Vorrechte nützten —, ebenso auch bedeutende wirtschaftliche Erfolge erzielen können, statt ihre Auftraggeber zu betrügen und zugrunde zu richten.

Offenbar besteht ein Unterschied zwischen diesen einmaligen, große wirtschaftliche Erschütterungen auslösenden *Geldspekulations- und Kredit-*

* South Sea Bubble.

krisen des 17. und 18. Jahrhunderts und den aus den Gesetzmäßigkeiten des industriellen Kapitalismus folgenden *zyklischen* Krisen, hatten doch jene stets eine *äußere* Ursache meist *politischen* Charakters, deren Voraussetzung, keineswegs aber Notwendigkeit in der Entwicklung der damaligen Geldwirtschaft, im *damaligen* Bankkredit und Aktiensystem begründet war.

Der verschieden hohe Entwicklungsstand der Produktionskräfte und Produktionsverhältnisse und die dementsprechend voneinander abweichenden gesellschaftlichen Formen *haben auch unterschiedliche Krisenarten zur Folge*.

Bereits die *Hamburger Krise* des Jahres 1799 zeigte ein wesentlich anderes Bild als die Krisen zu Beginn des 18. Jahrhunderts. Ihre Grundlagen bilden nicht mehr Spekulation und Spielsucht allein, vielmehr trug an ihrem Entstehen auch die Entwicklung der damaligen *Handelsoperationen* Schuld. Diese Krisenart läßt bereits den *Übergang* zu den periodischen industriellen Krisen des 20. Jahrhunderts erkennen.

Einen ähnlichen *Übergangscharakter* verraten auch die *Krisen in England* zu Anfang des 19. Jahrhunderts (1810, 1815 und 1819), die vornehmlich durch *politische Gründe* ausgelöst worden waren. Napoleons Kontinentalsperre hatte Englands Wirtschaftsbeziehungen zu Frankreich und den übrigen Ländern Europas plötzlich ein Ende gesetzt, und die in der Folge sofort auflebende Spekulation in Mangelwaren, die Schaffung neuer Märkte in Südamerika und Westindien, die gänzlich irrige Bewertung der Kapazität dieser Länder und schließlich — nach dem Fall Napoleons — eine Überschätzung der Möglichkeiten für den mit der Aufhebung der Kontinentalsperre sich neu belebenden europäischen Handel waren es, die diese Krisen verursachten.

Die weiteren, nach 1825 aufflammenden Krisen des 19. Jahrhunderts löste bereits der infolge der englischen industriellen Umwälzung sich immer mehr entwickelnde *industrielle Kapitalismus* aus, und erstmalig haben wir es hier mit regelrechten, sich *zyklisch wiederholenden Krisen* zu tun.

Dem *marxistischen Standpunkt* gemäß ist es die Entwicklung der *materiellen Produktionskräfte*, die die Entwicklung der menschlichen Gesellschaft und die gesellschaftlich-wirtschaftlichen Kennzeichen dieser Entwicklung bestimmen. Die industrielle Revolution in England brachte die Produktionskräfte der neuesten Epoche zur Entfaltung, deren Keime jahrhundertlang verborgen in der Hülle der Manufakturunternehmungen geschlummert hatten. Es entstand die moderne Industrie, und gleichzeitig mit ihr stellten sich die für die Zeit des industriellen Kapitalismus kennzeichnenden Widersprüche ein. Die Vergesellschaftlichung der Produktion, die Arbeitsteilung in der Erzeugung von Produktionsmitteln und Konsumgütern nahm ihren Anfang und führte zum Entstehen der mit ihr einhergehenden Störungen und Disproportionen.

Während die Geldspekulations- und Kreditkrisen des 17. und 18. Jahrhunderts zum guten Teil noch *wirtschaftsfremde (exogene)* Hintergründe hatten, handelt es sich bei den nach 1825 ausgebrochenen Krisen, wie eine Betrachtung

ihrer Geschichte deutlich zeigt, bereits um solche, deren (*endogene*) Entstehungsursachen in den inneren Gesetzmäßigkeiten der kapitalistischen Wirtschaft und in ihren zunehmenden Widersprüchen zu suchen, und die als *Überproduktionskrisen zyklischen Charakters* anzusprechen sind. Die Geld-, Kredit- und Börsenkrisen, die sich auch im Verlauf dieser Krisen beobachten lassen, sind nicht Ursachen, sondern bloß Begleiterscheinungen der Überproduktionskrisen.

Von den Krisen des 19. Jahrhunderts wurde diejenige von 1825 durch das Anschwellen der Produktion als Folge der Spekulation auf den neuen Märkten in Süd- und Mittelamerika ausgelöst, die durch die Anerkennung der ehemals spanischen und portugiesischen Kolonien als selbständige Staaten entstanden waren. Im Hintergrund der Krise von 1836 stand als Ursache des neuen Zyklus die durch *industrielle Neuerungen* (vornehmlich in der Textil- und in der Eisenindustrie) sprunghaft emporgeschnellte Erzeugung.

Das Bankgesetz Sir Robert Peels vom Jahre 1839 verursachte eine Geldkrise, während 1847 der Aufschwung im Eisenbahnbau und das damit zusammenhängende Gründungsfieber zum Ausbruch einer neuen Krise führte.

Die Krise von 1857 nahm bereits einen weitreichenden *internationalen Umfang* an, und schließlich kam es 1873 zur tiefsten und verheerendsten Krise des im Zeichen des freien Wettbewerbs stehenden industriellen Kapitalismus, die sowohl Europa als auch die Vereinigten Staaten erfaßte und in erster Linie die jungen kapitalistischen Staaten traf; *sie schloß die Reihe* der für diese Epoche kennzeichnenden Krisen ab.

Die zu Ende des Jahrhunderts auftauchenden neueren Erscheinungen, der Übergang zum Monopolkapitalismus und die hierdurch bewirkte *Änderung im Charakter der Krisen* veranlaßte einzelne Volkswirte, vom Aufhören oder Abflauen der Krisen *im allgemeinen* zu sprechen. So war TUGAN-BARANOWSKI der Ansicht, in England seien die plötzlichen Erschütterungen zu Ende, die Panik sei einer anhaltenden Depression gewichen, und KARL DIEHL vollends stellte — gemeinsam mit einigen anderen Krisenhistorikern — in Abrede, es hätte im 19. Jahrhundert nach 1873 Wirtschaftskrisen gegeben. Zu diesem sehr grundlosen Optimismus gab die Tatsache Anlaß, daß ähnlich den Krisen von 1799, 1810, 1815 und 1819, die die charakteristischen Zeichen des Überganges zu einem neuen Abschnitt des Kapitalismus, zum *industriellen Kapitalismus*, an sich trugen, auch in den Krisen von 1822 und 1891 *neue Züge* zu beobachten waren, die ihrerseits für einen neueren Abschnitt, d. h. für die zum Monopolkapitalismus führende Periode charakteristisch sind.

Der Rückgang der Produktion erreichte in diesen letzteren Übergangskrisen bei weitem nicht jenen Umfang wie in den vorangegangenen, doch zeigten im letzten Viertel des Jahrhunderts auch die Perioden des Aufschwunges keine so große Ausschläge wie in den vorangegangenen Jahrzehnten, die

Depressionen nahmen einen sich hinziehenden Charakter an. Durch vorübergehende Lösung der angesammelten Widersprüche erfüllten eben die Krisen ihre den inneren Gesetzen des Kapitalismus entsprechende Funktion nicht.

Im 20. Jahrhundert zeigte dann die dem ersten Weltkrieg vorangegangene und besonders die Weltwirtschaftskrise der Jahre 1929/33, wie weitgehend unbegründet der Optimismus der erwähnten Volkswirte war. Es erwies sich also, daß die Funktionsstörungen der Krisen des vorangegangenen Jahrzehntes nicht Zeichen einer Entspannung waren, daß sie vielmehr den Kern bis dahin unbekannter, in Umfang und Auswirkung gleicherweise stürmisch angewachsener, neuer Weltwirtschaftskrisen in sich trugen.

SCHUMPETER* vertritt die Meinung, das Wesen einer Wirtschaftsanalyse bestünde nicht in dieser oder jener Prognose, vielmehr in der Aufdeckung jener einwandfrei nachweisbaren Tatsachen, anhand derer *die Berechtigung der Prognose glaubhaft gemacht werden kann*. Der kurze Überblick über die Krisen der vergangenen Jahrhunderte und über diejenigen des 20. Jahrhunderts beweist eindeutig, daß sich die Krisen des Kapitalismus mit fortschreitender Entwicklung der Produktionskräfte sowie mit zunehmendem Anwachsen und Umsichgreifen der internationalen Arbeitsteilung sowohl in ihren materiellen Verheerungen als auch in ihrer gesellschaftlichen Bedeutung zusehends *vertieften*, und daß ihre Auflösung in wiederkehrende Zyklen keineswegs ihr Aufhören bedeutete.

Die Existenz und die zyklische Wiederkehr von Krisen und hauptsächlich die mit der technischen Entwicklung fortschreitende *Zunahme ihrer verheerenden Kräfte* sowie die Steigerung ihrer gesellschaftlichen Auswirkungen sind bewiesene *wirtschaftsgeschichtliche Tatsachen*.

Was beginnen aber wohl mit diesen unleugbaren historischen Tatsachen jene Volkswirte, die es unternehmen, den Weiterbestand des Kapitalismus und die immer gewissere Möglichkeit zur Ausschaltung der vorhandenen Schwierigkeiten unter Beweis zu stellen?

Sie tun wie etwa das Kind beim Versteckenspielen, das seine Augen schließt in der Meinung, die anderen sähen es dann ebenfalls nicht. Sie verwerfen den Begriff der Krise als eines ungeeigneten Beweismittels und *meinen, mit der Verwerfung des Begriffes auch das Problem selbst aus der Welt geschafft zu haben*.

Die *zwingende Kraft* dieser wirtschaftsgeschichtlichen Tatsachen gebar an Stelle der *Bourgeois-Krisentheorie die neuzeitlichen Theorien der Konjunkturschwankungen*, zu deren richtiger Bewertung wieder ein Rückblick in die Vergangenheit, auf den Gang ihres Entstehens unerläßlich ist.

* Capitalism, Socialism and Democracy, G. Allen & Unwin, London, 1947.

II.

Wirtschaftstheoretische Voraussetzungen

Die Vorgeschichte und die Wurzeln der heutigen Konjunkturtheorien lassen sich bis in den Urboden der klassischen bürgerlichen Wirtschaftstheorien, bis in das für dauerhaft gehaltene geistige Paradies des freiwettbewerblichen Kapitalismus zurückverfolgen, in dem das »erste Menschenpaar« der Volkswirtschaftslehre, SMITH und RICARDO, mit ihrer Arbeitswerttheorie den Sündenfall begangen haben.

Auf die Marxsche, von derjenigen SMITHS und RICARDOS abweichende Darlegung der Arbeitswerttheorie, auf Erfolg und Verbreitung dieser Lehren antwortete das geistige Produkt der sogenannten *Wiener Schule*, die Grenznutzentheorie, als die für universal gehaltene antimarxistische Weltpanazee.

Ein guter Teil der bürgerlichen Theoretiker des 19. Jahrhunderts machte sich zum Priester des neuen Götzen und opferte zu diesem Zweck ohne Bedenken die *Arbeitswerttheorie* seiner Lehrmeister SMITH und RICARDO. Sie erlagen der Versuchung und waren damit — so meinten sie —, auch »von allem Übel« befreit.

In Wirklichkeit bekämpfen sich indessen hier nicht mehr zwei Werttheorien, sondern die *vorhandene* und die *im Entstehen begriffene neue Gesellschaftsordnung*.

Den Platz der in den letzten drei Jahrzehnten des vergangenen Jahrhunderts von der Bildfläche verschwundenen Theorien nahmen neue Richtungen ein. Die sogenannte *historische Schule*, die ganz allgemein die Lebensberechtigung jeder Art volkswirtschaftlicher Theorien leugnete, gelangt in den sechziger Jahren des 19. Jahrhunderts in den Vordergrund.

In den siebziger Jahren tauchten jedoch Lehren auf, die — wiewohl sie aus dem geistigen Rüstzeug der Klassiker schöpften und sich im Gegensatz zur historischen Schule zu Beschützern der Theorie machten —, im wesentlichen die *Klassiker kritisierten*, um sich schließlich von ihren Lehren zu *distanzieren*, indem sie der auf der subjektiven Werttheorie fußenden Grenznutzenlehre zum Triumphe verhalfen.

Die Schaffung der subjektiven Werttheorie erwies sich jedoch als Pyrrhussieg, da letzten Endes das Fetischisieren des Individuums, der individuellen Wirtschaft und der subjektiven Bewertung durch die »Robinsonaden« des an der »guten« Quelle sitzenden kurzsichtigen Menschen unrettbar in die *Sackgasse der Mikroökonomie* führte, aus der es einen *Ausweg in die makroökonomische Analyse* weder gab, noch geben konnte.

Vergeblich suchte diesen Ausweg MARSHALL, das Haupt der Schule von Cambridge, indem er den Versuch machte, anhand seines berühmten Scherenvergleiches die Betrachtungsweisen der *subjektiven und objektiven Werttheorie*

zu vereinen, vergebens wollte er damit — wenigstens zum Teil — von der wissenschaftlichen Ehre der britischen Klassiker retten, was noch zu retten war. Die Aufstellung dieser Zwittertheorie konnte nicht gelingen.

Doch als fruchtlos erwiesen sich auch die Bemühungen WALRAS', des Hauptes der *Lausanner Schule vom wirtschaftlichen Gleichgewicht*, der zur Verteidigung der gefährdeten Grenznutzenlehre und zum Beweis der makroökonomischen Verwendbarkeit der mikroökonomischen Betrachtungsweise zur »furchterregenden« Waffe der Mathematik griff.

Die Entwicklung der theoretischen Physik von Einstein über Nils Bohr und allenfalls bis Sommerfeldt oder Heisenberg hat den Beweis erbracht, daß eine Annäherung der Wirklichkeit mit abstrakten mathematischen Methoden durchaus im Bereich der Möglichkeit liegt, oder mit anderen Worten, es gibt abstrakte mathematische Verfahren, deren komplizierte Gleichungssysteme letztlich etwa zu den Atomkraftwerken führen.

Von POINCARÉ, dem französischen Mathematiker, stammt der Anspruch, die Mathematik bestehe ihrem Wesen nach aus *bequemen* und *nützlichen* Vereinbarungen.

Die *simultanen Gleichungssysteme* WALRAS', deren er sich zur Beschreibung der wirklichen Erscheinungen und Vorgänge des Wirtschaftslebens bedienen wollte, mochten zwar ein bequemer Behelf zur Erreichung dieses vorgesteckten Zieles gewesen sein, *letztlich erwiesen sie sich jedoch keineswegs als nützlich*. Eine eingehende Kritik der geistigen Leistung von WALRAS würde einerseits zu weit führen, andererseits befaßt sich mit dieser Frage ohnehin ein ausgedehntes Schrifttum.*

Hier soll bloß darauf verwiesen werden — was übrigens auch NOGARO mit aller Deutlichkeit hervorhebt —, daß WALRAS durch Anwendung der mathematischen Methode die Aufmerksamkeit von den eigentlichen Problemen *ablenkt*, und daß der *praktische Nutzen* seiner anspruchsvollen Geistesproduktion *herzlich gering* ist, da das Walrassche mathematische Modell des globalen Marktgleichgewichtes die *tatsächlichen wirtschaftlichen Vorgänge nicht erklärt*.

Den Anstrengungen WALRAS' kommt hier eine ganz andere Bedeutung zu, die Tatsache nämlich, daß er *mit seiner mathematischen Methode die ersten Anregungen für die ökonometrische Entwicklung der Theorien der Konjunkturforschung*, besonders der dynamischen Wirtschaftstheorie gegeben hat.

Die Notwendigkeit, eine allgemeine dynamische »Theorie« der Konjunkturschwankungen zu entwickeln, dürfte sich aus den Zusammenhängen zwischen bürgerlicher *Wirtschaftstheorie und Philosophie* ergeben haben.

* Im ausländischen Schrifttum enthält das Buch von Betrand NOGARO: »La valeur logique des théories économiques«, Paris, 1947, eine eingehende Kritik des Lebenswerkes Walras'. In Ungarn neuerdings GY. GÖNCÖL: »Makroökonomie und Werttheorie« (Jahrbuch des Instituts für Wirtschaftswissenschaften an der Ungarischen Akademie der Wissenschaft, 1958, S. 43).

Es würde uns wenig sagen, gelänge es bei einer Analyse der führenden bürgerlichen Wirtschaftstheorien des vergangenen Jahrhunderts nachzuweisen, *inwieweit sich diese Theorien auf die führenden philosophischen Richtungen ihrer Zeit stützen*. SURÁNYI-UNGER* macht in zweien seiner Bücher den Versuch, diesen Zusammenhang zu klären und nachzuweisen.

Außer Frage steht jedoch, daß in der *neokantischen Schule der Badenser Philosophen* (WINDELBANDT und RICKERT) die gesamte Erkenntnistheorie zum subjektiven *werttheoretischen Kritizismus* wird, eine Anschauung, die eine gewisse Verwandtschaft mit der Bestrebung der *Grenznutzenschule* zeigt, die ausgehend von der Theorie des wirtschaftlichen Wertes, diesen zum Angelpunkt und zur Grundlage ihrer Wissenschaft zu machen versucht. Ebenso findet sich in Herbert SPENCERS »First Principles«, nahezu 10 Jahre vor WALRAS' »Éléments d'économie politique pure« im Zuge der ständigen Veränderung das *Streben nach dem Gleichgewicht* und vor Erreichen des absoluten der Begriff des *mobilen Gleichgewichtes*.

Die mit CASSEL und LIEFMANN beginnenden neueren Richtungen indes sowie der amerikanische sogenannte Institutionalismus gehen außer dem Marxismus auch der Grenznutzentheorie zu Leibe ebenso, wie sich die Vertreter der letzteren früher gegen die Lehren des Marxismus und der klassischen Schule gewandt hatten.

Die philosophischen Grundlagen der theoretischen Tätigkeit CASSELS und LIEFMANNS sowie des sogenannten amerikanischen Institutionalismus lassen sich in der Marburger Schule der Neokantisten aufdecken, derzufolge der Philosophie in erster Linie nicht die Aufgabe zukomme, eine selbständige Erkenntnistheorie systematisch darzulegen, vielmehr sei sie eher berufen, — durch logische Aufgliederung funktioneller Beziehungen — die immanenten logischen Voraussetzungen der wissenschaftlichen Erfahrungen aufzudecken. Zu derartigen Analysen aber eignen sich ihres Erachtens vornehmlich die mit mathematischen Methoden arbeitenden Naturwissenschaften und ganz allgemein die mathematische Denkweise.

Der Sinn dieses kurzen Abstechers auf das Gebiet der philosophischen Zusammenhänge läßt sich nun vom Gesichtspunkt unseres Themas folgendermaßen zusammenfassen :

Die Beweisbarkeit der Annahmen oder ihre Unstichhaltigkeit nachzuweisen, gehört nicht zu unseren Aufgaben, kennzeichnend ist jedoch die vollständige Verarmung der bürgerlichen Philosophie jener Zeit. Weder gibt sie ihren enttäuschten Anhängern weiterhin Anregungen, noch schmiedet sie — wenn auch noch so schwache — Waffen zur Auseinandersetzung mit der auf geschichtlich-gesellschaftlicher Grundlage fußenden Analyse des Marxis-

* T. SURÁNYI-UNGER: »Philosophie in der Volkswirtschaftslehre«, Jena, 1923—26, und »Die Entwicklung der theoretischen Volkswirtschaftslehre im ersten Viertel des 20. Jahrhunderts«, Jena, 1927.

mus. Den Vertretern der amerikanischen institutionalistischen, behavioristischen Schule und ihren Jüngern, die — mit MITCHELL an der Spitze — die Grundlagen für die gemäß den Regeln der empirischen Ökonometrie arbeitende Konjunkturforschung und damit für die modernen »Theorien der Konjunkturschwankungen« niedergelegt haben, bleibt als Folge der Zunahme der inneren Widersprüche des Monopolkapitalismus nur der Weg von den kahlen Gefilden der verarmten Philosophie in jenes gelobte Land, in dem die Mathematik und vornehmlich die mathematische Statistik bloß die an der Oberfläche sich abzeichnenden dynamischen Änderungen untersucht.

III.

Entwicklung der dynamischen Betrachtungsweise der Konjunkturschwankungen

Der historische Überblick über Wirtschaftskrisen und bürgerliche Wirtschaftstheorien hat deutlich gezeigt, daß die bürgerlichen Volkswirte nicht zuletzt mit Rücksicht auf die Bewahrheitung der marxistischen Krisentheorien von der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts an das »beste Rüstzeug« ihres Arsenal auf die Ausarbeitung von Theorien verwendeten, die sich zur allgemeinen Widerlegung der Lehren des Marxismus — ihrer Ansicht nach — eigneten.

Zur Erklärung der in steter Verschärfung begriffenen Krisenerscheinungen boten sich bloß *zwei* Wege. Der *eine*, die tiefliegenden geschichtlichen, sozialen und wirtschaftlichen Auswirkungen der auf Grund der neuen Produktionskräfte voll zur Entfaltung gelangten neuen Produktionsverhältnisse zu untersuchen, der Weg also, den MARX beschritten hatte, der aber unvermeidlich und zwangsläufig zur Marxschen Krisendeutung führt und der sich eben deshalb für die bürgerliche Wirtschaftstheorie als ungangbar erwiesen hatte.

Verblieb somit die zweite — auch mit der Klassenzugehörigkeit der Krisentheoretiker übereinstimmende — *Möglichkeit*, das bisher ausgehobene Bett der klassischen Betrachtungsweise zu verlassen und sich unter *Verwerfung einer tiefschürfenden Untersuchung des Krisenproblems* mit Hilfe ökonometrischer Methoden im wesentlichen auf die Erforschung der dynamischen Veränderungen einzelner, *auf der Oberfläche sich abspielender*, wichtigerer Teilerscheinungen zu beschränken.

Wie gestaltete sich nun aber dieses System des »zweiten Weges«? Vor allem faßt es die weitverzweigten Erklärungen der Konjunkturschwankungen *zu zwei Hauptgruppen* zusammen und behandelt somit gesondert die sogenannten *endogenen* und *exogenen* Wirkungskomponenten.

Die Untersuchung der *endogenen* Faktoren befaßt sich 1. mit dem Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage, sodann 2. mit dem Produktionsverlauf,

3. mit den Zusammenhängen zwischen Produktion und Verbrauch und schließlich 4. mit der Rolle von Geld und Kredit.

Das solcherart über die Auswirkungen der endogenen Faktoren gewonnene Bild wird durch Behandlung der exogenen Faktoren, wie beispielsweise der Auswirkungen des veränderlichen Klimas, der Volksvermehrung, technischer Neuerungen oder Kriege ergänzt.

Die Abstimmung dieser *Detailgesichtspunkte* und Teilerklärungen sowie ihre *Zusammenfassung in ein einheitliches System bildet eine eigene Aufgabe*, die mit Hilfe ökonomischer Methoden zu versehen die sogenannte allgemeine »*dynamische Wirtschaftstheorie* der Konjunkturschwankungen« unternimmt. Ihr fielen als Aufgabe zu, die im folgenden zu behandelnden einzelnen Konjunkturdeutungen als Teile des Ganzen zusammenzufassen und unter wechselseitiger Berücksichtigung der wirtschaftlichen Momente die *allgemeine Gesetzmäßigkeit* der wirtschaftlichen *Veränderungen* anzugeben.

Doch wenden wir uns nun der Frage zu, auf welchen wichtigeren Überlegungen die Gleichungssysteme der allgemeinen dynamischen Theorien beruhen.

1. *Störungen im Gleichgewicht von Angebot und Nachfrage*. Die Natur des Gesetzes der Nachfrage bildet eines der wichtigsten Grundprobleme der bürgerlichen Volkswirtschaftstheorie.

Die diesbezüglichen ersten bahnbrechenden Schritte unternahm H. L. MOORE,* dessen Arbeiten seitens der bürgerlichen Konjunkturforschung durch umfassende Anwendung der statistischen *Korrelation* weiterentwickelt werden. In ihrer jüngsten Entwicklung wird sie in zunehmendem Maße zu einem Zweig der sogenannten *Ökonometrie*.**

Der grundlegende analytische Behelf für die zeitgemäße ökonomische Analyse der Nachfrage, der Begriff der *Nachfragekurve*, stammt noch von COURNOT.

Mit der Nachfrage-Funktion befaßten sich, COURNOT*** folgend, auch MARSHALL und WALRAS.

MARSHALL führte einen Quotienten ein, den er aus den einander zugehörigen, in Prozenten ausgedrückten Änderungen von Nachfrage und Preis bildet; er nannte diese reine Zahl die *Elastizität der Nachfrage*:**** Bereits MARSHALL

* *Economic Cycles*, New York, 1914.

** In Anlehnung an R. Frisch nennt man Ökonometrie jene Richtung, die die Festlegung der wirtschaftlichen Gesetze in quantitativer Gestalt und deren statistischen, zahlenmäßigen Beweis anstrebt.

*** Cournots Funktion der Nachfrage schreibt sich in der Form $y = f(p)$, in der y die Nachfrage nach einer gewissen Ware, p hingegen dessen Preis bedeutet.

**** Bezeichnet dy die Änderung der Nachfrage y , dp hingegen diejenige des Preises, dann sind $\frac{dy}{y}$ und $\frac{dp}{p}$ die prozentuellen Änderungen; die Nachfrage-Elastizität schreibt sich mithin zu $n = \frac{dy}{y} : \frac{dp}{p} = \frac{pdy}{ydp} < 1$.

mußte feststellen, daß die Nachfrage nach einer Ware nicht von deren Preis allein, sondern auch vom Preis anderer, insbesondere der für diese Waren substituierbaren oder sie komplementär ergänzenden Güter abhängt. WALRAS zog diese Tatsache in seiner Nachfragegleichung in Betracht.*

Zum Zweck der statistischen Bestimmung des Gesetzes von der Nachfrage muß sowohl die ständige Veränderung jener Faktoren berücksichtigt werden, die auch in den Nachfrage-Zusammenhängen eine Rolle spielen, als auch die Veränderung der in diese Beziehung nicht aufgenommenen, unregelmäßig störenden Momente. Aus diesem Grund besteht zwischen der Größe der Nachfrage und deren Faktoren ein stochastischer Zusammenhang, zu dessen Untersuchung sich die Korrelationsrechnung, u. zw. in der Regel die Methode der mehrfachen Korrelation eignet.**

2. *Die Dynamik der Produktion.* Bisher war von der Erklärung gewisser dynamischer Erscheinungen der Wechselwirkung von Angebot und Nachfrage mit den *Mitteln der statischen Theorie* die Rede.

Bei diesen Untersuchungen spielten die *zeitlichen Veränderungen* bloß eine untergeordnete Rolle. Zur Deutung des Konjunkturablaufes bedarf es jedoch der primären und *grundlegenden* Betonung der wirtschaftlichen Veränderungen. Um diese analysieren zu können, muß *ein exaktes Mengenmaß festgelegt werden*, das es gestattet, die wichtigeren Eigenheiten der verschiedenen Veränderungen auszudrücken. Die Einführung des Begriffes der Veränderungsgeschwindigkeit oder -intensität (der Größe der auf die Zeitein-

* Die ursprüngliche Walrassche Gleichung $y = f(p_1 \cdot p_2 \dots p_n)$ ist eine Funktion mit mehreren Veränderlichen, in der nebst dem Preis p_1 der untersuchten Waren, auch die Preise ($p_2 \dots p_n$) anderer Waren enthalten sind.

** Zur Analyse des Verlaufes der Nachfragekurve muß auch das Angebot mit berücksichtigt werden. Wird auf die Ordinate eines Koordinatensystems die Höhe des Preises, auf die Abszisse die Warenmenge aufgetragen, dann veranschaulichen zwei Kurven das Angebot und die Nachfrage. Hinsichtlich der gleichzeitigen Parallelverschiebung der Angebots- und Nachfragekurven unterscheidet die Nachfrage-Analyse vier Fälle. 1. Die Verschiebungen der Angebotskurve sind viel bedeutender als die Verschiebungen der Nachfragekurve, und die Verschiebung beider Kurven geht gleichzeitig, jedoch voneinander unabhängig vor sich; 2. Die Verschiebung der Nachfragekurve ist die bedeutendere. In den Fällen 1. und 2. entsprechen die den entstandenen zweierlei Punktgruppen, im Sinne der Korrelationsrechnung angelegten Durchschnitts- (Regressions-) Kurven der empirischen Annäherung der Angebots- bzw. der Nachfragekurve. 3. Die *Verschiebungen der Anfrage- und Nachfrage-Kurven sind gleich groß*, jedoch auch weiterhin *unabhängig voneinander*. In diesem Fall kann an die Punktgruppe — wegen ihrer in jeder Richtung annähernd gleichen Größe — keine geeignete Kurve angelegt werden. Durch eine beträchtliche Ausschaltung der Verschiebung der Angebots- und Nachfragekurven muß deshalb eine Korrektur vorgenommen werden, die diesen Fall gleichfalls auf einen der obigen Fälle 1. oder 2. zurückzuführen gestattet. Schließlich besteht 4. ein *entschiedener Zusammenhang* zwischen den Verschiebungen der beiden Kurven, wobei dann die Schnittpunkte der einander zugehörigen Kurven eine sowohl von der Angebots- als auch von der Nachfragekurve *abweichende Kennlinie* beschreiben; eine an eine derartige Punktgruppe angelegte Kurve würde somit weder mit dem Gesetz des Angebotes, noch mit demjenigen der Nachfrage übereinstimmen. Die *Nachfrage* ist wegen der trendartigen Änderungen nicht nur eine Funktion des *Preises* oder der Preise, sondern auch eine solche der *Zeit*, somit *eine Funktion mit mehreren Veränderlichen*. Das quantitative Gesetz der Nachfrage wird deshalb in geeigneter Weise vermittle der Methode der *mehrfachen Korrelation* bestimmt.

heit entfallenden Veränderung) ermöglicht die quantitative Kennzeichnung der *raschen* und *langsamen* Veränderungen. Die *Veränderungsgeschwindigkeit* der *rasch* ablaufenden Erscheinungen ist *groß*, diejenige der *langsamen* hingegen *klein*. Die dynamische Anschauung untersucht in erster Linie *Erscheinungen bedeutender Veränderungsgeschwindigkeit*, wogegen die Veränderungsgeschwindigkeit der statischen Erscheinungen vernachlässigbar gering ist oder gar auf Null absinkt. Außer auf die Veränderungsgeschwindigkeit und in engem Zusammenhang mit dieser erstreckt sich die dynamische Anschauung auf zwei weitere bedeutende, mit dem Faktum der Veränderung organisch zusammenhängende Momente. Das eine ist die Rolle der Erwartungen, der Voraussicht (der Antizipationen) der Unternehmer, das andere hingegen die Rolle der Ungewißheit oder des Risikos. Unter dynamischen Verhältnissen hängt nämlich die Nachfrage nicht bloß von den Marktpreisen, sondern auch davon ab, was die die Nachfrage verkörpernden Personen von der Zukunft erwarten, wie sie deren vermutliche Gestaltung beurteilen. Aus steigenden Preisen schließen sie auf kommende weitere Preissteigerungen, so daß die Nachfrage steigt, während sinkende Preise — aus ähnlichen Überlegungen — eine Verminderung der Nachfrage zur Folge haben. Die Nachfrage ist demnach nicht nur eine Funktion der Preise, sondern zugleich auch eine solche der Preisveränderungsgeschwindigkeit.

Der statischen Anschauung zufolge meldet sich demgegenüber bei anziehenden Preisen eine geringere, bei niedrigeren Preisen eine größere Nachfrage, doch handelt es sich in der Statik um konstante, in der Dynamik um veränderliche Preise. Zur Zeit von Preisveränderungen, die durch eine große Preisveränderungsgeschwindigkeit ausgelöst werden, tritt das dynamische Element stark hervor.

Die Voraussicht in die Zukunft wirkt sich auch auf das *Angebot* aus, die Dynamik des Angebotes hängt somit ebenfalls von der Geschwindigkeit der Preisveränderungen ab.

Demgemäß sind es die *Zeitmomente der Produktion*, u. zw. die im Gefolge der Beschleunigung der *Preisveränderungsgeschwindigkeit* unbegründet ansteigende Nachfrage, die aus der Langwierigkeit des Produktionsprozesses folgende *falsche Einschätzung der Zukunft*, unrichtige Erwartungen und im Zusammenhang damit eine unbegründete Ausweitung der Produktion sowie schließlich die *Dauerhaftigkeit* der Produktionsmittel, die die Ursache der sogenannten *Überkapitalisierungskrise* bilden.

Mit der Einführung der Begriffe der Unternehmererwartung (Antizipation) und der Ungewißheit wandte sich diese Auffassung letzten Endes gegen die Ansicht der früheren subjektiven Konzeption über das *rationelle Verhalten des Individuums* und gegen das auf dieser Grundlage gestaltete Bild des Wirtschaftslebens.

Da die wirtschaftenden Individuen außerstande sind, die Voraussetzun-

gen für ihr Handeln zu übersehen, kann auch ein einheitliches Verhalten *rationell* handelnder Individuen nicht vorausgesetzt werden.

3. *Dynamischer Zusammenhang zwischen Nachfrage nach Produktions- und solcher nach Verbrauchsgütern.* Entscheidend für die Bewertung der Produktionsgüter ist letztlich die Preisgestaltung der mit ihrer Hilfe produzierbaren Verbrauchsgüter, eine Tatsache, die einen wichtigen *dynamischen Zusammenhang* zwischen der Herstellung von Produktionsgütern und der Erzeugung von Verbrauchsgütern schafft.

Als erster Gegenstand einer Untersuchung wirft sich die Frage auf, *welche Veränderungen im Kreis der Produktionsgüter durch eine Steigerung der Erzeugung von Verbrauchsgütern verursacht werden.* Ist die Kapazität der Produktionsanlagen voll ausgenutzt, muß zwecks Ausweitung der Verbrauchsgüterproduktion auch die Menge der zu ihrer Herstellung erforderlichen Produktionsgüter erhöht werden. J. M. CLARK befaßte sich mit der Frage des Zusammenhanges zwischen einfacher *Erneuerung* und *Erweiterung* (Investition) im Zuge der Produktionssteigerung. Seiner Ansicht nach *hängt die Erneuerung von der Nachfrage nach Fertigprodukten ab, die Erweiterung hingegen davon, ob die Nachfrage nach Fertigprodukten steigende oder sinkende Tendenz zeigt.* Der Erneuerungsbedarf hängt mithin im großen und ganzen von jener *Geschwindigkeit* ab, mit der der *Verbrauch die Fertigprodukte auf dem Markt aufnimmt.* Der Erweiterungs-(Investitions-) Bedarf steht also mit der Veränderung der Geschwindigkeit, d. h. mit seiner Beschleunigung oder Verlangsamung im Zusammenhang. Das Schrifttum der bürgerlichen Volkswirtschaftslehre nennt diesen Satz das *Beschleunigungsprinzip* (acceleration principle).

CLARKs Untersuchungen gemäß ist mithin *zur Erhöhung der Nachfrage nach Produktionsgütern eine Beschleunigung in der Zunahme des Verbrauches erforderlich.* Nach der *dynamischen Anschauung* stellt das *Beschleunigungsprinzip* eine *äußerst wichtige Erklärung* für die *Wirtschaftsschwankungen* dar, ja HANSEN und RÖPKE messen in ihren Konjunkturtheorien dem Beschleunigungsprinzip *entscheidende Bedeutung* bei.

Zur *quantitativen Bestimmung* der Gestaltung der Produktions- und der Verbrauchsgüter, d. h. *zweier Wirtschaftsfaktoren* genügt jedoch der *einzig* zwischen ihnen bestehende *quantitative Zusammenhang* — das Beschleunigungsprinzip — nicht. *Hierzu bedarf es mindestens noch einer weiteren Beziehung,* wie sie sich unabhängig vom Beschleunigungsprinzip aus der Tatsache ergibt, daß die *Nachfrage nach Verbrauchsgütern auch vom Durchschnittseinkommen,* der Kaufkraft, abhängt, die sich ihrerseits nach dem Beschäftigungsgrad in den Produktionsgüterindustrien richtet.

Andererseits ist die Erhöhung der Investitionen und die Steigerung der Erzeugung von Produktionsgütern — nach einem dem Beschleunigungsprinzip entgegengesetzten kausalen Zusammenhang — geeignet, fördernd auf die Gestaltung des Verbrauchs zu wirken.

Die quantitativen Eigentümlichkeiten dieses Zusammenhanges unterzog J. M. KEYNES in seinem Werk »The General Theory of Employment, Interest and Money« (London, 1936) einer eingehenden Untersuchung. KEYNES geht in seiner 1930 in dem Buch »Treatise on Money« veröffentlichten ersten Theorie der Konjunkturschwankungen davon aus, daß die Spartätigkeit als solche — indem sie den Verbrauch einschränkt —, bloß eine Verschiebung der Kaufkraft bedeutet. Folgen jedoch der Spartätigkeit Investitionen, dann fördert sie die künftige Steigerung des Nationaleinkommens, da die Investitionen die der Nation zur Verfügung stehende Produktionskraft erhöhen. Das Gleichgewicht des Wirtschaftslebens wird durch die Diskrepanz zwischen Ersparnissen und Investitionen gestört. Sind Investitionsbeträge und Ersparnisse gleich hoch, dann muß das Gleichgewicht zwischen den Ausgaben der Verbraucher und der erzeugten Gütermenge zu den geltenden Preisen zustande kommen. (KEYNES unterscheidet zwei Preisniveaus, von denen das eine das Niveau der Preise jener Güter darstellt, die in einer bestimmten Zeitspanne für den Verbrauch erzeugt werden, während es sich bei dem anderen um das Niveau der Preise jener Güter handelt, die die Produktionskraft der gesamten Nation steigern. Die beiden Preisgruppen sind miteinander im Gleichgewicht, solange sie mit ihren Produktionskosten übereinstimmen.) Nach KEYNES verursacht den Mangel an Übereinstimmung in der Regel nicht der Ersparnisanteil, der von den Gewohnheiten der Bevölkerung abhängt und somit als hinreichend konstant angesehen werden kann, sondern das Ausmaß der in Abhängigkeit von den Geschäftsaussichten stark schwankenden Investitionen. Nun sind aber nur die Banken in der Lage, durch Kreditgewährung die Gefahr von Gleichgewichtsstörungen in sich tragende, das Ausmaß der Ersparnisse übersteigende Investitionen zu ermöglichen, weshalb KEYNES vermeint, mit Hilfe einer entsprechenden Zinspolitik sowie durch vernünftige Regelung der Bankkredite könne Wirtschaftskrisen vorgebeugt oder ihre Auswirkung gemildert werden. Die Konjunkturtheorie KEYNES' übernimmt im wesentlichen K. WICKSELLS bereits 1898 veröffentlichte Ansicht, dieser Teil der anspruchsvollen Arbeit KEYNES kann deshalb bei weitem nicht als originell bezeichnet werden.

Seiner Feststellung gemäß ist die Summe der Verbrauchsausgaben (C) eine eindeutige Funktion des in der Volkswirtschaft zur Verfügung stehenden Gesamteinkommens (Y), es gilt mithin

$$C = f(Y).$$

Dieser Verbrauchsfunktion zufolge steigen Einkommen und Verbrauch nicht in gleicher Weise, vielmehr ist einer gewissen Größenordnung der Einkommenssteigerung ein Verbrauchszuwachs geringeren Ausmaßes zugeordnet. Demnach ist der Quotient der Zuwachsraten von Verbrauch und Einkommen, den KEYNES die Grenzneigung des Verbrauchs (marginal propensity to consume)

nennt, kleiner als die Einheit :

$$\frac{C}{Y} < 1.$$

KEYNES will damit zum Ausdruck bringen, daß bei größeren Einkommen ein geringerer Teil für Verbrauchszwecke aufgewendet und ein größerer Teil als Ersparnis zurückgelegt wird, als dies bei kleineren Einkommen der Fall ist. KEYNES' Gedankengängen zufolge ist ferner das Einkommen der in den Verbrauchsgüterindustrien und in den Produktionsgüter erzeugenden Industrien Beschäftigten je für sich gleich den Verbrauchsausgaben (C) und den der Anschaffung von Produktionsgütern, d. h. den Investitionen gewidmeten Beträgen (I) :

$$Y = C + I.$$

Demnach erhöht sich mit zunehmenden Investitionen auch das Gesamteinkommen, was KEYNES damit erklärt, daß die aus der Investitionszunahme resultierende zusätzliche Tätigkeit, die sogenannte primäre Beschäftigung als Folge der Einkäufe der Beschäftigten eine weitere, sogenannte sekundäre Beschäftigung zustande kommen läßt, da sich das Ergebnis der primären Beschäftigung im Wirtschaftsleben fortpflanzt, wobei sich allerdings die aufeinanderfolgenden Zuwachsraten ständig vermindern, weil $c < 1$.

Es kann somit geschrieben werden :

$$\Delta Y = \Delta I + c \Delta I + c^2 \Delta I + \dots = \frac{\Delta I}{1 - c},$$

worin $\Delta I = a$ die Zunahme der Investitionen bedeutet, während $c = \frac{C}{I} < 1$.

Da $c \Delta I$ das auf die Anschaffung von Verbrauchsgütern aufgewendete Mehreinkommen der bei den Investitionsarbeiten Beschäftigten darstellt, erhöht sich auch die Kaufkraft der in den Verbrauchsgüterindustrien Beschäftigten ($c \Delta I$).

Jene Konstante, mit der ein Investitionsüberschuß zu multiplizieren ist, um das aus diesem resultierende Gesamt-Mehreinkommen zu erhalten, wird *Keynesscher Multiplikator* (investment multiplier) (k) genannt :

$$\Delta Y = k \Delta I, \text{ worin } k = \frac{1}{1 - c}.$$

Der Multiplikator steht mithin in einer einfachen Beziehung zur Grenzneigung des Verbrauchs, d. h. der größeren Verbrauchsneigung ordnet sich ein größerer Multiplikator zu.

Verbrauch, Gesamteinkommen und Investitionen lassen sich nunmehr durch gleichzeitige Berücksichtigung des Keynesschen Multiplikators und des Beschleunigungsprinzips bestimmen.

Aus obigem entwickelte KEYNES eine neue, seiner früheren diametral entgegengesetzte Konjunkturtheorie, wobei wohl auch eine Erkenntnis mitgespielt haben mag, zu der ihm mutmaßlich die 1929/30 ausgebrochene große Weltwirtschaftskrise Anlaß gab. Sie erwies, wie wenig es möglich sei, durch eine Abänderung des Zinsniveaus die drohende Gefahr abzuwenden. Jedenfalls verleugnete KEYNES in seiner neuen Theorie beide grundlegende Sätze seiner ersten Konjunkturdeutung, so vor allem, daß die Gleichgewichtsstörungen im Wirtschaftsleben durch die Diskrepanz zwischen Ersparnissen und Investitionen verursacht werden, indem er feststellt, die Summe der Ersparnisse sei stets jener der Investitionen gleich. Zum zweiten regelt das gegenseitige Verhältnis zwischen Ersparnissen und Investitionen nicht mehr der Zinsfuß, sondern das Einkommen, und den Konjunkturverlauf bestimmt fortan das *Verhältnis zwischen Einkommen und Verbrauch*. Mit dieser Wendung rechtfertigte er — wenn nichts anderes — so doch zumindest die berühmt gewordene Antwort des einstigen Premierministers MacDonald auf die Frage, warum er sich denn nicht mit seinen volkswirtschaftlichen Problemen an die gelehrten Volkswirtschaftler Englands wende. MacDonald erwiderte hierauf, wenn er fünf Gelehrte konsultierte, erhielte er darauf fünferlei Antworten, es sei denn, auch KEYNES befände sich unter den Fünf, denn dann hätte er Aussicht auf sechs voneinander abweichende Stellungnahmen.

Den Zusammenhang zwischen Investitionen und der aus diesen resultierenden Verbrauchssteigerung bringt der Keynesische Multiplikator nur mit *annähernder Genauigkeit* zum Ausdruck; überdies betrachtete KEYNES seinen Multiplikator *als konstant und sofort wirksam*. Mehrere bürgerliche Volkswirte wiesen darauf hin, daß die *Größe des Multiplikators von den Umständen abhängt und der durch ihn ausgedrückte Effekt nur nach Ablauf einer gewissen Zeit zur Geltung kommen könne*.

Nach H. D. ROBERTSON* wird das Einkommen einer bestimmten kurzen Zeitspanne nicht *so gleich* ausbezahlt, als verfügbares Einkommen in dieser Zeitspanne kann mithin bloß jenes angesehen werden, *das in der dieser Zeitspanne vorangegangenen Zeit erzielt wurde*. Erreicht also der Konsum in der Zeit $t + 1$ den Wert von C_{t+1} , so ist er eine Funktion des in der vorangegangenen Zeit t erzielten Einkommens (Y_t), d. h.

$$C_{t+1} = f(Y_t).$$

Unter Zugrundelegung des Multiplikators und des Beschleunigungsprinzips lassen sich *Verbrauch und Gesamteinkommen* und damit die Gestaltung der Investitionen nunmehr bestimmen.

Zur Veranschaulichung des Gedankenganges der Berechnung soll hier von der Voraussetzung einer Erhöhung des Beschäftigungsgrades und von dem

* ROBERTSON: »Saving and Hoarding«, Econ. Journ. 1933, S. 399.

Fall ausgegangen werden, daß jährlich der *gleiche* Betrag A investiert wird (beispielsweise öffentliche Arbeiten). Das Ziel der Investition ist die Ankurbelung, d. h. das Herausheben der Volkswirtschaft aus dem Zustand der Depression und der Stockang.

Beträgt in der Zeit t der Verbrauch C_t , in der vorangegangenen Zeitspanne hingegen C_{t-1} , dann ist $\beta (C_t - C_{t-1})$ die auf Grund des Beschleunigungsprinzips zustande kommende Investition; β ist hier ein *Proportionalitätsfaktor, der jene Investition ausdrückt, die zur Verbrauchssteigerung um eine Einheit erforderlich ist, d. h. die sogenannte Beschleunigungs- (Investitions-) Konstante*. Das Einkommen Y_t in der Zeit t ist offenbar gleich der Summe der Ausgaben für Verbrauch und Investition, es gilt mithin

$$Y_t = A + \beta (C_t - C_{t-1}) + C_t.$$

Den Verbrauch C_t der folgenden Zeitspanne $t + 1$ bestimmt obiges Einkommen, es wird also

$$C_{t+1} = f(Y_t) = [A + \beta (C_t - C_{t-1}) + C_t].$$

Dieser funktionelle Zusammenhang, der den Wert des Verbrauchs in den *verschiedenen* Zeitspannen ausdrückt, läßt sich lösen, sofern der Multiplikator, die Beschleunigungs- (Investitions-) Konstante sowie die zahlenmäßigen Beträge der ständigen Investitionen bekannt sind. In diesem Fall beträgt der Verbrauch C_t , und die Gestaltung des Nationaleinkommens sowie der Investitionen d. h. ihre statistische Zeitreihe läßt sich rechnerisch ermitteln.

Die Gestaltung von Verbrauch und Einkommen hängt nach den Berechnungen vom Wert des Multiplikators und der Beschleunigungskonstante ab; hierzu lassen sich drei wichtige Fälle unterscheiden.

1. *Bei verhältnismäßig niedrigen Werten für Multiplikator und Beschleunigungskonstante* zeigt der Verbrauch anfangs eine starke Zunahme, die sich sodann verlangsamt, um sich schließlich einem konstanten Wert zu nähern. In diesem Fall nähert sich auch die Investitionstätigkeit einem konstanten Wert, der Verbrauch zeigt keine Schwankungen, die induzierten Investitionen hingegen nehmen beständig ab.

2. *Ein höherer Wert der Beschleunigungskonstante* hat anfänglich eine bedeutende induzierte Investition zur Folge, die später mit sinkendem Verbrauch abnimmt. In diesem Fall geht das Gesamteinkommen trotz der ständigen Investitionen zurück, und als Ergebnis treten ein absoluter Rückgang des Verbrauchs, negativ induzierte Investitionen (Einschränkung der Erneuerungen) und wirtschaftlicher Niedergang ein. Mit der Zeit vermindert sich jedoch der Rückgang des Verbrauchs, womit sich das Zusammenschrumpfen

der Investitionen mildert und sich Möglichkeiten zum Einsetzen eines neuen Expansionsprozesses eröffnen.

3. *Liegen die Werte sowohl des Multiplikators als auch der Investitionskonstante verhältnismäßig hoch*, entsteht gleichfalls eine Schwankung mit beständig zunehmenden Ausschlägen. *Erhöht sich schließlich der Wert der beiden Konstanten weiter*, d. h. nehmen sie noch höhere Werte an, dann nimmt der Verbrauch ohne Schwankungen mit gleichbleibender Beschleunigung zu, und auch die induzierten Investitionen steigen beständig an, so daß die stufenweise Einstellung der ständigen Investitionen längere Zeit hindurch die ständige Zunahme des Volumens der Erzeugung von Verbrauchs- und Produktionsgütern nicht mehr behindert.

Mit den Ergebnissen des gemeinsamen Effektes von Akzelerator und Multiplikator befaßten sich zahlreiche namhafte bürgerliche Volkswirtschaftler.*

Das Nationaleinkommen einer Zeitspanne t wird durch die staatlichen Investitionen (Investitionen der öffentlichen Hand) G_t , durch die Ausgaben für den Verbrauch C_t sowie durch die induzierten Privatinvestitionen I_t bestimmt :

$$Y_t = G_t + C_t + I_t$$

Die Ausgaben für den Verbrauch sollen über die Grenzneigung zum Konsum (a) mit dem Einkommen Y_{t-1} der vorangegangenen Zeitspanne in Zusammenhang stehen, d. h. es sei

$$C_t = a (Y_{t-1}).$$

Die Größenordnung der induzierten Investitionen wird durch die auf die Differenz zwischen C_t und C_{t-1} bezogene Beschleunigungs- oder Investitionskonstante β bestimmt.

$$\begin{aligned} I_t &= \beta (C_t - C_{t-1}) \\ &= \beta (a Y_{t-1} - a Y_{t-2}) \\ &= a \beta Y_{t-1} - a \beta Y_{t-2}. \end{aligned}$$

*HARROD : »The Trade Cycle«, Oxford, 1936.

HARROD : »An Essay in Dynamic Theory«, Econ. Journ. Bd. 49 (1939).

N. KALDOR : »A Model of the Trade Cycle«, Econ. Journ. Bd. 50 (1940).

P. A. SAMUELSON : »Interactions between the Acceleration Principle and the Multiplier, Readings in Business Cycle Theory.«

P. A. SAMUELSON : »Dynamic Process Analyses, Survey of Contemporary Economics«, Evanston, 1948.

P. A. SAMUELSON : »Foundations of Economic Analyses, Cambridge, 1948.«

A. H. HANSEN : »Business Cycles and National Income«, New York, 1951.

G. HABERLER : »Prosperität und Depression«, Bern, Francke, 1948.

Setzt man nunmehr den Wert der staatlichen (öffentlichen) Investitionen gleich 1, dann erhält man für die *Gestaltung des Einkommens*

$$\begin{aligned} Y_t &= 1 + a Y_{t-1} + a \beta Y_{t-1} - a \beta Y_{t-2} \\ &= 1 + a (1 + \beta) Y_{t-1} - a \beta Y_{t-2}. \end{aligned}$$

Löst man obige Gleichung auf verschiedene Werte für a und β , dann läßt sich feststellen, daß die Gestaltung der Einkommen in den aufeinanderfolgenden Zeitspannen *je nach den angenommenen Werten eine gleichmäßig zunehmende, eine mäßige bzw. eine äußerst starke Schwankung zeigt*.

Es kann hier nicht unbemerkt bleiben, daß sich Akzelerator und Multiplikator nur selten simultan auf die kumulative Weiterführung der Größenordnung der Einkommensveränderung auswirken. Grund zu dieser Annahme kann der Umstand geben, daß die ersten Investitionen die Ausgaben für den Verbrauch ansteigen lassen, die ihrerseits induzierte Investitionen auslösen; die Folge ist eine weitere Erhöhung des Verbrauchs und somit eine weitere Zunahme der induzierten Investitionen u.s.f. Indessen darf man hier nicht übersehen, daß der Akzelerator nicht von der absoluten Höhe der Verbrauchsausgaben, sondern *von ihrer Zuwachsgeschwindigkeit abhängt*, und daß dieses Zuwachsverhältnis im Sinne der an die Verbrauchsfunktion geknüpften Überlegungen eine *abnehmende Tendenz* zeigt. In Perioden mit sinkendem Verbrauch können sonach die induzierten Investitionen einen Rückgang erleiden und auch der Multiplikator ist solcherart bloß noch im regressiven Abschnitt wirksam.

4. *Die Dynamik von Geld und Kredit.* Außer den bisher berührten *realwirtschaftlichen* Faktoren spielen in den Konjunkturschwankungen auch die von der *Geld- und Kreditseite* her wirksamen Kräfte eine wesentliche Rolle. Die Grundlagen der dynamischen Theorie von Geld und Kredit legten die schwedischen Volkswirte K. WICKSELL, E. LINHAL und B. OHLIN, ferner J. M. KEYNES und D. H. ROBERTSON nieder.

Das ersparte Geldkapital sucht nach Anlagemöglichkeiten auf dem Kapitalmarkt. Die Nachfrage stammt von den Unternehmern, die Kapital für ihre Investitionen suchen, während die Ersparnisse das dieser Nachfrage gegenüberstehende Angebot bilden. Der Preis, der sich auf dem Markt ausgestaltet, ist der *Marktzinsfuß*. *Liegt dieser weder höher noch niedriger als der tatsächliche Ertrag des investierten Kapitals*, dann kommt auf dem Kapitalmarkt der sogenannte *natürliche Zins* zustande, wie ihn WICKSELL nennt, der die Gleichheit zwischen dem Kapitalbedarf der Investitionen und den Ersparnissen sichert. Dieser Zustand, d. h. *der natürliche Zins spielt sich auf dem Markt nur sehr schwer ein*, so daß der Marktzinsfuß nur selten mit dem natürlichen übereinstimmt. Ist indessen der natürliche höher als der Marktzins, d. h. ist das Geld billiger als der Gewinn, der durch seine Investition erzielt werden

kann, dann wirkt sich dies *konjunkturfördernd* aus. Die Unternehmungslust wird in solchen Fällen zu einem sich selbst stärkenden Prozess, während ein Marktzinsfuß, der den »natürlichen Zinsfuß« übersteigt, den entgegengesetzten Vorgang auslöst.

Nach WICKSELL weichen Markt- und natürlicher Zinsfuß meist aus *zwei Gründen* voneinander ab. Der eine zeigt sich auf der *Angebotsseite*, wo infolge der Schaffung von Krediten durch die Banken außer den Ersparnissen eine sogenannte *zusätzliche Kaufkraft* entsteht, den anderen Grund bildet die auf der Seite der *Nachfrage* zu beobachtende Erscheinung, daß die Ersparnisse zum Teil *angehäuft* (thesauriert) werden.

Konjunkturschwankungen werden mithin — sofern sich in der Volkswirtschaft keine ungenutzte Produktionskräfte mehr finden —, von der *geldlichen Seite*, durch die sogenannten *Wicksellschen Prozesse* verursacht. Sie stammen aus der Abweichung zwischen natürlichem und Marktzins, die sich im wesentlichen aus der Schaffung von Krediten durch die Banken und aus der Thesaurierung ergibt, ihre Wirkung aber zeigt sich darin, daß die Menge der verfügbaren Gelder bzw. Zahlungsmittel im Zuge des sogenannten expansiven Prozesses eine Vermehrung erfährt (Inflationserscheinung), während sie im Zuge des Schrumpfungs- (Kontraktions-) Prozesses abnimmt (Deflationserscheinung).

5. *Monetäre Faktoren der Konjunkturschwankungen.* Die oben beschriebenen dynamischen Vorgänge von Geld und Kredit wirken sich auf die Konjunkturschwankungen von zwei Richtungen, u. zw. von der realwirtschaftlichen und von der monetären Seite her aus. Wie diese Einflüsse zur Geltung kommen, läßt sich an den erörterten Wicksellschen Prozessen verfolgen.*

Einzelne Volkswirte, wie beispielsweise M. R. G. HAWTREY führten die *Konjunkturschwankungen ausschließlich auf monetäre Einflüsse zurück* und behaupten, in der Konjunkturwelle entspringe der Aufschwung dem Anschwellen des Geldstromes, der *Inflation*, die Stockung hingegen seiner Eindämmung, der *Deflation*. Nach HAWTREY vermögen die Banken im Zuge der Kreditausweitung im allgemeinen nicht festzustellen, wie weit ihre Bargeldvorräte infolge der fortgesetzten Ausweitung der Kreditgewährung zusammenschrumpfen. Eine übermäßige Kreditausweitung führe zu einer starken Verminderung der Bargeldvorräte der Banken, was sie nicht nur zu einer Einstellung der Kreditausweitung, sondern zu einer *allgemeinen Kreditrestriktion zwingt, und dies sei die Ursache für das Umschlagen aus der Expansion zur Kontraktion*. Könnte der Wicksellsche Expansionsprozeß *haltmachen*, sobald der *natürliche* auf das Niveau des Marktzinsfußes abgesunken ist, dann lösten

* Die Wicksellschen Prozesse lassen sich nicht auf monetäre Ursachen allein zurückführen, weil Wicksell außer auf den Marktzinsfuß auch auf den natürlichen Zinsfuß (die Profitrate) verweist und solcherart das Auftreten der Krise nicht ausschließlich durch monetäre Vorgänge erklärt.

monetäre Gründe keine weitere Schrumpfung aus. Der Schrumpfungsprozeß setzt sich jedoch aus realwirtschaftlichen Gründen weiter fort, weil mit dem Aufhören der Expansion auch die Verbrauchssteigerung ein Ende nimmt, was dem Beschleunigungsprozeß gemäß die Erzeugung von Produktionsgütern herabsetzt, ein Effekt, der in der gesamten Volkswirtschaft weitere Wellen schlägt. Dem Übel mit monetären Mitteln, durch Ausweitung des Geld- und Kreditvolumens zu steuern, ist nicht mehr möglich, da die vorhandenen Produktionsanlagen zum Großteil nicht mehr in Betrieb sind. Das Aufhören der Kreditausweitung vermag also keinen konstanten Zustand zuwege zu bringen, verursacht vielmehr ein weiteres Schrumpfen des Wirtschaftslebens.

Nimmt andererseits die Kreditausweitung ständig zu, dann kann das *scharfe Tempo* des Aufschwunges bloß bis zur vollen Ausnutzung der Produktionskräfte andauern, um sich zu verlangsamen, sobald diese erreicht ist. Damit bleibt die Entwicklung jener Industriezweige, die von der sich *beschleunigenden* Entwicklung anderer Industriezweige abhängig sind, nicht bloß stehen, sondern *fällt sogar zurück*, und mit monetären Mitteln läßt sich auch hierfür keine Abhilfe schaffen.

Den Feststellungen gemäß, zu der die dynamische Erklärung der Konjunkturabläufe gelangt, kann mithin wegen dieser zyklischen Änderungen der Konjunkturschwankungen *in der kapitalistischen Wirtschaft die Aufrechterhaltung der Vollbeschäftigung nicht erreicht werden*. Da man diesem Umstand eine den Gang des gesamten Zyklus beeinflussende Bedeutung beimißt, wurde auch diese Frage mehrfach untersucht. In seinem zweiten großen Werk* weist KEYNES darauf hin, daß es in *kapitalstarken Ländern großer Investitionen bedarf*, um die Lücke zwischen Verbrauch und Produktion zu füllen, weil *als Folge des größeren Gesamteinkommens die Grenzneigung des Verbrauchs in diesen Ländern verhältnismäßig klein ist, während die Ersparnisse hohe Beträge erreichen*. Überdies ist in kapitalstarken Ländern der Großteil der Fazilitäten zu lukrativen Investitionen bereits genutzt, d. h. es mangelt an genügenden, neuen, hohe Gewinne versprechenden Anlagemöglichkeiten. Als Folge hiervon *sinkt der natürliche Zinsfuß schon vor Erreichen der Vollbeschäftigung auf das Niveau des Marktzinsfußes ab, was den Schrumpfungsprozeß einleitet*. Kapitalstarke Länder kämpfen aus diesem Grunde unter Umständen selbst *inmitten des größten Aufschwunges mit dauernder Arbeitslosigkeit*. KEYNES' Konjunkturdeutung weist ferner darauf hin, daß umfangreiche Investitionen die Grenzleistungsfähigkeit des Kapitals, die sogenannte »Grenzproduktivität« herabsetzen, die erst nach lang anhaltender Depression, nach Erschöpfung der Gütervorräte und nachdem sich wieder Bedarf nach Erneuerung der Produktionsmittel gemeldet hat, von neuem ansteigen kann.

* »The General Theory of Employment, Interest and Money«, London, 1936, S. 219.

Ein starkes Anwachsen der Kapitalbestände und damit das Absinken des Kapitalertrages unter das Niveau des Marktzinseszinses verhindert somit nach KEYNES ohne geeignete konjunkturpolitische Maßnahmen die Vollbeschäftigung der Produktionskräfte, so daß das Volk in solchen Ländern trotz des Reichtums an Produktionsgütern sein Leben in Armut fristet (*poverty in the midst of plenty*).

Bemerkenswert ist die Wirkung, die das Niveau des Marktzinsfußes auf den Konjunkturverlauf ausübt. Sie besteht laut KEYNES darin, daß die *Liquiditätsnachfrage** bei einem Absinken des natürlichen Zinsfußes unter den Stand des Marktzinsfußes einen solchen Umfang annimmt, daß sie förmlich nicht mehr befriedigt werden kann. Mangels Rentabilität wird das Geld nicht angelegt, statt investiert zu werden, häuft es sich in Gestalt von Ersparnissen an, und auch eine Kreditausweitung vermag keine Hilfe mehr zu bringen, da sie nicht mehr zur Intensivierung der Investitionen, sondern zu einer Steigerung der Geldanhäufung führt.

*

Die bisher beschriebenen Begründungen für die Konjunkturschwankungen folgen aus deren endogenen Faktoren. Unter *äußeren (exogenen) Faktoren* sind die Einflüsse der außerhalb der Wirtschaft stehenden, d. h. der *naturbedingten*, der *gesellschaftlichen* oder der *technischen* Momente zu verstehen.

Faßt man die Tätigkeit der bürgerlichen Interpreten der Konjunkturschwankungen kurz zusammen, dann lassen sich fünf Hauptgruppen ihrer »Theorien« unterscheiden :

Auf *endogene*, d. h. auf die der Natur des Wirtschaftslebens innewohnenden Gründe berufen sich die Anhänger der *Überkapitalisierungstheorie*, in erster Linie AFTALION,¹ SPIETHOF,² HULL³ und CLARK.⁴ Die wichtigsten Vertreter des Gedankens der *monetären Überkapitalisierung* sind WICKSELL,⁵ ROBERTSON,⁶ RÖPKE⁷ und KEYNES.⁸

Diese Überlegungen stehen bereits in einem engeren Zusammenhang mit dem Geldumlauf und auch mit den Preisen.

Ausschließlich von der Geldseite interpretiert die Konjunkturschwankung

* Die Liquiditätsnachfrage stammt — Keynes gemäß — aus dem Bestreben der Individuen, aus irgend einem Grund je mehr Bargeld in ihrem Besitz zu halten.

¹ Review of Economic Statistics, Bd. IX (1927) S. 165—170.

² Vorbemerkungen zu einer Theorie der Überproduktion, Schmollers Jahrbuch, Bd. 26 (1902) S. 721—759.

³ Industrial Depressions, New York, 1911.

⁴ Business Acceleration and the Law of Demand, Journ. of Pol. Ec., Bd. XXV (1917), S. 217—235.

⁵ Geldzins und Güterpreise, Jena, 1890 (Einleitung).

⁶ Study of Industrial Fluctuations, London, 1915.

⁷ Crisis and Cycles, London, 1936.

⁸ Treatise on Money, London, 1930 und General Theory of Employment, Interest and Money, London, 1936.

gen die *monetäre Theorie* und deren bedeutendster Vertreter HAWTREY.¹ Eine weitere Gruppe begründet die Konjunkturschwankungen vornehmlich mit einem zeitweise auftretenden *Überfluß an Verbrauchsgütern*. Die beiden bedeutenden Verfechter dieser Theorie, FOSTER und CATCHINGS,² sehen die Gründe vor allem im Sparen, denn — ihrer Ansicht nach — werden die Ersparnisse nicht zur Anschaffung von Verbrauchsgütern, sondern zur Ausweitung der Produktion verwendet. Sie sprechen deshalb vom Dilemma des Sparens, das sich einerseits unheilvoll auf den Konjunkturverlauf auswirkt, andererseits für das Wirtschaftsleben unerlässlich ist.

Schließlich führen die einer fünften Gruppe angehörenden Volkswirte die Konjunkturschwankungen auf wirtschaftsfremde, *exogene Ursachen* zurück, die da sind: *Witterung und Ernteertrag* (H. L. MOOR³), *psychologische Gründe* (PIGOU⁴), sowie *technischer Fortschritt und Erneuerungen* (LIEFMANN⁵) und SCHUMPETER⁶).

Mit der letzteren, der »exogenen« Gruppe, verfährt jedoch die allerneueste bürgerliche Theorie der Konjunkturschwankungen höchst stiefmütterlich. PAULSEN schreibt zu dieser Frage im wesentlichen, im Zuge der wissenschaftlichen Interpretation der Konjunkturerscheinungen könne eine auf *äußere* (d. h. exogene) Gründe aufgebaute Konjunkturdeutung notwendigerweise *nur unrichtig sein*,* um sodann fortzufahren, was auf das Wirtschaftsleben *von außen* wirke, übe seine Wirkung *auf das Ganze* aus und es hänge von den *einzelnen Elementen* des Wirtschaftssystems ab, *welche der wirtschaftlichen Erscheinungen durch wirtschaftsfremde Ursachen ausgelöst werden*, ein Gedankengang, den er durch sein Beispiel vom Meer veranschaulicht: Nicht die rhythmische Bewegung des Windes ist es, die das Wellen des Meeres verursacht, sondern das Meer reagiert auf den Wind kraft seiner eigenen physikalischen Beschaffenheit mit dem Wellenschlag. Die Konjunkturen stellten Größenänderungen dar, die sich aus dem wechselseitigen Zusammenhang (Interdependenz) der wirtschaftlichen Erscheinungen ergeben, jede Theorie der Konjunkturschwankungen müsse mithin *endogen* sein. Ähnliche Ansichten vertreten auch jene Volkswirte, die sich zu den ökonometrischen Methoden der Konjunkturforschung bekennen, da ihre dynamischen Gleichungssysteme die exogenen Faktoren *als gegeben* und unveränderlich annehmen. PAULSEN verweist noch auf eine für möglich gehaltene Auffassung, derzufolge das Wirtschaftsleben, seiner Struktur entsprechend, auf äußere unregelmäßige

¹ Currency and Credit, London, 1928.

² The Dilemma of Thrift, New York, 1928.

³ Economic Cycles: Their Law and Causes, New York, 1904.

Generating Economic Cycles, New York, 1923.

⁴ Industrial Fluctuations, London, 1927.

⁵ Theorie des Sparens und der Kapitalbildung, Schmollers Jahrbuch, Bd. 36 (1910)

S. 1565—1642.

⁶ Business Cycles, London—New York, 1939.

* Neue Wirtschaftslehre, 1954, S. 283.

Stöße oder Impulse mit regelmäßigen Schwankungen reagiert (siehe Schaukelpferdgleichnis von WICKSELL*), weshalb es nicht in den Zustand des konstanten Gleichgewichtes gelangen kann. Ebenso darf angenommen werden, daß eine an sich zur Dynamik neigende Volkswirtschaft nicht im Gleichgewicht bleibt, sondern sich beständig *ändert*, und daß sich diese Änderung in fortgesetzten expansiven und schrumpfenden (kontraktiven) Wirtschaftsprozessen manifestiert. Einer Untersuchung der exogenen Erscheinungen kann sonach bloß methodische Bedeutung zukommen, denn exogen ist, was überhaupt nicht oder auf Grund der gegenwärtigen Erkenntnisse *noch nicht* als endogener Faktor und mithin folgerichtig auch nicht als abhängige Veränderliche anderer endogener Faktoren behandelt werden kann.

PAULSEN erklärt sodann die *brennende Notwendigkeit der vorerwähnten Unterscheidung*.

Werde nämlich die Änderung der Bevölkerungszahl von *wirtschaftlichen Ursachen* hergeleitet, wie dies Malthus tue, dann könne damit der an und für sich exogene Faktor der Fluktuation der Bevölkerungszahl zu einem endogenen Faktor werden. In gleicher Weise ließe sich die Frage des *technischen Fortschrittes* beurteilen, ja, so setzt er mit fast merkbarem Kopfschütteln fort, der marxistischen Auffassung gemäß würden gesellschaftliche Erscheinungen, wie Kriege und selbst Revolutionen — als Folgen der in den gesellschaftlichen Produktionsverhältnissen eintretenden Veränderungen — zu endogenen, d. h. begründbaren Ursachen.**

Das also ist des Pudels Kern, die gefährlichen exogenen Ursachen, wie Kriege und Revolutionen sollen außer acht gelassen werden, da sie sich, mit der Entwicklung der gesellschaftlichen Produktionsverhältnisse in Zusammenhang gebracht, zu endogenen wandeln könnten, und in diesem Fall hätte man sich mit ihnen auch in merito zu befassen.

KEYNES, der die Theorie der Harmonie leugnet und von der mikroökonomischen, marginalen Betrachtungsweise zu den Methoden der makroökonomischen Analyse gelangt, zieht die Schlußfolgerungen aus den beständigen Störungen in der Beschäftigung, aus dem ungenügenden Verbrauch u. ä. hinsichtlich der Widersprüche der bestehenden Produktionsverhältnisse ebenso, wie auf der anderen Seite PAULSEN oder die Vertreter der dynamischen Theorie der Konjunkturschwankungen diese Frage ebenso konsequent umgehen.

Aus der soeben beschriebenen, den Ansichten PAULSENS ähnlichen Auffassung und aus der mit dieser zusammenhängenden Zielsetzung der Konjunkturforschung folgt natürlicherweise, daß sich die bürgerlichen Konjunkturtheorien nur mit wirtschaftlichen Teilerscheinungen zu befassen vermögen und die Frage nach den wahren Gründen der Krisen *nicht beantworten können*.

* Wird — nach Wicksells Gleichnis — ein Schaukelpferd mit einem Stab unregelmäßig gestoßen, dann sind die Bewegungen, die es ausführt, regelmäßiger als diejenigen des Stabes.

** PAULSEN: »Neue Wirtschaftslehre«, 1954, S. 284

IV.

Ausbau und Kritik der allgemeinen dynamischen Theorie der Konjunkturschwankungen

Die nach den ökonometrischen Verfahren arbeitenden, bereits besprochenen dynamischen Deutungen des Konjunkturablaufs befaßten sich nur mit *Teilerscheinungen*, wandten mithin ihre Aufmerksamkeit jeweils bloß einem Moment des Wirtschaftslebens zu, indem sie beispielsweise die Gesetzmäßigkeiten der Dynamik von Angebot und Nachfrage, von den EVANSSchen Gleichungen ausgehend, untersuchten oder den mathematischen Zusammenhang zwischen *Investition und Verbrauch* analysierten und hierbei anhand des Beschleunigungs- (Akzelerations-) Prinzips sowie des Zusammenhanges zwischen Verbrauch und Einkommen die *Gleichung des Verbrauchsvolumens* einführten.

Nach Ansicht der Vertreter der neueren Konjunkturtheorien mußte sich diese Analyse notwendigerweise als *einseitig* erweisen, weil sie die *sonstigen*, für die Untersuchung des Konjunkturablaufes in Frage kommenden *Faktoren* entweder nur in zweiter Linie oder überhaupt nicht in Betracht zog, somit keine *allgemeine*, d. h. sämtliche wirtschaftliche Momente umfassende Deutung der Konjunkturschwankungen zu geben vermochte. Zwischen allen an der Gestaltung des Konjunkturablaufs beteiligten Faktoren besteht aber ein wechselseitiger Zusammenhang (Interdependenz).

Nun mag sich zwar der eine oder der andere dieser Faktoren prägnanter auswirken und schwerer ins Gewicht fallen, zur Deutung des Gesamtvorganges bleibt es aber unerlässlich, sämtliche Wirkungskomponenten in ein *einheitliches System zusammenzufassen*, ihre Wechselwirkung klarzulegen, ihren Effekt mit den Methoden der Ökonometrie *zahlenmäßig* zu ermitteln und solcherart ihre Sätze mathematisch genau zu beweisen.

Dies unternimmt die dynamische Wirtschaftstheorie, die damit die *allgemeine dynamische Theorie der konjunkturellen Wellenbewegungen* auszubauen vermeint.

Das dynamische Gleichungssystem nimmt seinen Ausgang — wie bereits erwähnt —, von der *Walrasschen Theorie des wirtschaftlichen Gleichgewichtes*.

Da jedoch WALRAS' Gleichungssystem *statischen* Charakters ist, mußte es weiterentwickelt werden. H. L. MOOR war es, der es mit Hilfe des Prinzips vom *beweglichen Gleichgewicht* zu einem dynamischen machte. (Seiner Auffassung nach entsprechen die der Tendenz (dem Trend) der verschiedenen Wirtschaftsfaktoren zugehörigen Werte je einer *momentanen* Gleichgewichtslage und befriedigen somit ein Walrassches Gleichungssystem.)

MOORS Überlegungen werden aber nur den gegenseitigen Zusammenhängen zwischen Werten gerecht, die sich auf *denselben Zeitpunkt* beziehen,

während die allgemeine dynamische Theorie der Konjunkturschwankungen einerseits die Entwicklung der Gegenwartsfaktoren *aus der Untersuchung früherer Werte herleiten muß*, andererseits jedoch auch zu prüfen hat, welche neue Werte eine gegebene Lage für die Zukunft zu zeitigen vermag. Unter solchen Umständen erwies es sich als unumgänglich, ein Gleichungssystem zu entwickeln, das die für *verschiedene Zeitpunkte gültigen Werte* miteinander verbindet.

Die Möglichkeit zur »Dynamisierung« der Walrasschen Gleichungen boten die bereits besprochene *Veränderungsgeschwindigkeit*, das *Zeitmoment der Produktion*, das damit in Zusammenhang stehende *Beschleunigungs- (Akzelerations-) Prinzip* sowie der *Keynessche Multiplikator* und schließlich die Beachtung der *quantitativen Gesetze der monetären Vorgänge*.

Die Konstanten bzw. Veränderlichen des dynamischen Gleichungssystems sind — wie bei WALRAS — zweierlei Art, u. zw. solche, die einem *äußeren (exogenen)* Faktor (z. B. der Natur oder technischen, politischen u. ä. Ursachen) entspringen, mithin *als gegeben* betrachtet und somit nicht näher untersucht werden, sowie *innere (endogene)* Wirtschaftsfaktoren, wie Preise, Gütermengen usw., deren zeitliche Gestaltung sich durch Gleichungen bestimmen läßt, die auf den bei einem gegebenen Wertsystem der exogenen Faktoren bestimmten Ausgangswerten fußen.

Das *dynamische Gleichungssystem* geht davon aus, daß die miteinander in Wettbewerb stehenden Unternehmer in der untersuchten Volkswirtschaft mit Hilfe der »*produktiven Dienstleistungen*« (d. h. der Produktionsfaktoren) — großemäßig bezeichnet mit L und T —, verschiedene Produktions- und Verbrauchsgüter — großemäßig bezeichnet mit A und B —, erzeugen.

Die *erste Gruppe* der dynamischen Gleichungen

$$\begin{aligned} L_S &= L_D \\ T_S &= T_D \end{aligned} \tag{1}$$

drückt die *Gleichheit von Angebot und Nachfrage der »produktiven Dienstleistungen«* aus, wobei sowohl Angebot als auch Nachfrage Funktionen sämtlicher *Preise* und deren *Veränderungsgeschwindigkeit* darstellen, d. h.

$$L_S = L_S(p_1, p'_1 \dots p_a, p'_a),$$

worin p_1 und p'_1 die Preise der produktiven Dienstleistungen, p_a und p'_a hingegen die Preise der erzeugten Güter bedeuten. Ähnlich wie diese Angebotsfunktion wird auch die Nachfragefunktion L_D geschrieben. Die Funktionen können anhand statistischer Daten gelöst werden, die Nachfrage- und Angebotsfunktionen sind mithin in Gestalt von Regressionsgleichungen als empirisch gegeben anzusehen.

Die zweite Gruppe des Gleichungssystems bringt die *Gleichheit von Angebot und Nachfrage der erzeugten Güter* zum Ausdruck, d. h.

$$\begin{aligned} A_S &= A_D \\ A_S &= B_D. \end{aligned} \quad (2)$$

Angebot und Nachfrage sind auch hier Funktionen sämtlicher Preise und ihrer Veränderungsgeschwindigkeit, während sich jedoch die Funktion der Nachfrage auch hier ähnlich wie oben zu

$$A_D = A_D(p_a, p'_a, \dots)$$

schreiben läßt, ergibt sich als Funktion des Angebotes

$$A_S = A_S[p_a(t - \pi_a), p'_a(t - \pi_a), \dots],$$

denn zieht man auch das *Zeitmoment* der Produktion in Betracht, und ist π_a die Dauer der Erzeugung der Güter A , dann wird das Angebot im Zeitpunkt t durch die Werte der im Zeitpunkt $t - \pi_a$ gültigen früheren Preise $p_a(t - \pi_a) \dots$ beeinflusst. Da sich die Funktion auch hier durch eine Regressionsgleichung lösen läßt, können auch die Nachfrage- und Angebotsfunktionen als gegeben betrachtet werden.

Die dritte Gruppe des Gleichungssystems ist der Ausdruck für die Gleichheit von Angebot und Nachfrage des Kapitals.

Das Kapitalangebot setzt sich aus den Ersparnissen (S) und der Kreditkreation ($\frac{dM}{dt}$) zusammen, wobei M das jeweilige Geld- bzw. Kreditvolumen bezeichnet.

Die Nachfrage nach Kapital wird durch das zur Produktionsausweitung erforderliche Kapital (K) und durch die Liquiditätsnachfrage (L_i) gestaltet, wobei die Größen S , M , K und L_i Funktionen sämtlicher Faktoren der Wirtschaftslage, in erster Reihe des Zinsfußes (i), der Preise und ihrer Veränderungsgeschwindigkeit sind; es gilt mithin

$$\begin{aligned} S &= S(i, p_a, \dots) \\ M &= M(i, p_a, \dots). \end{aligned}$$

Die Gleichheit von Kapitalangebot und -nachfrage findet ihren Ausdruck in der Gleichung

$$S = \frac{dM}{dt} = K + L_i. \quad (3)$$

Besteht nun das Gleichungssystem (1) aus m , das Gleichungssystem (2) aus v Gliedern (der Zahl der produktiven Dienstleistungen bzw. der produzierten Güter entsprechend), dann beträgt die Zahl der Gleichungen (1), (2) und (3) $m + v + 1$, und die Zahl der in ihnen enthaltenen zu ermittelnden Funktionen $p_1 \dots p_a \dots i$ ergibt ebenfalls die Summe von $m + v + 1$. Da (1), (2) und (3) voneinander *nicht unabhängig* sind (die eine Gleichung folgt aus der anderen), bedarf es zur Lösung der insgesamt $m + v + 1$ Funktionen noch einer weiteren, u. zw. der *Geldumlaufgleichung*

$$MV = \sum A_s p_a, \quad (4)$$

in der V die Umlaufgeschwindigkeit des Geldes, also die empirisch gegebene Funktion der Wirtschaftsfaktoren bezeichnet, u. zw. in der Form

$$V = V(i, p_a).$$

Die hier beschriebenen vier Gleichungssysteme bilden gemeinsam ein allgemeines dynamisches Gleichungssystem, aus dem sich die unbekannten Funktionen p_1 , p_a und i , ferner die anderweitigen wichtigen wirtschaftlichen Momente $L \dots A \dots L_i$ rechnerisch ermitteln lassen.

Die Möglichkeit zur zahlenmäßigen Lösung der obigen, nach E. THEISS* schematisch wiedergegebenen, Teile eines Gleichungssystems bildenden Gleichungen bietet die Analyse anhand empirischer Untersuchungen bzw. die Korrelationsrechnung aus statistischen Zeitreihen. Im Zuge dieser verwickelten Berechnungen wird auf Grund einer Versuchsreihe von Berechnungen (also vermittels eines Herumprobierens) entschieden, welche der Veränderlichen zu berücksichtigen sind, bzw. welche unter ihnen vernachlässigt werden können.**

Zur zahlenmäßigen Ermittlung der in den Gleichungen figurierenden Koeffizienten eignet sich die *Methode der Mehrfachkorrelationsrechnung*, bei der die untersuchten Gleichungen mit *Regressionsgleichungen identifiziert* und auf Grund empirischer Tatsachen als linear angenommen werden. Die *Korrelationskoeffizienten* weisen die Übereinstimmung zwischen der in Rede stehenden Nachfrage- bzw. Angebotgleichung und den tatsächlichen Daten nach, während die *Regressionskoeffizienten* den Einfluß der unterschiedlichen Wirtschaftsfaktoren mit zahlenmäßiger Genauigkeit ergeben.

Die Regressionskoeffizienten bringen mithin die *Größe des Einflusses der einzelnen Faktoren* zum Ausdruck, den diese auf die Konjunkturschwankungen ausüben.

* E. Theiss: »Konjunkturforschung« (in ungarischer Sprache), Budapest, 1943.

** Beispiele für derartige Berechnungen gibt Tinebergen in seinem Werk »Les cycles économiques aux États Unis d'Amerique«, Genève, 1939.

Es kann sich auch als notwendig erweisen, den *mittleren Fehler* der Regressionskoeffizienten zu ermitteln, da dieser selbst bei einer die Einheit annähernden Korrelation beträchtliche Werte annehmen kann, so daß also durchaus die Möglichkeit besteht, daß die Werte der Regressionskoeffizienten in der Folge statistisch ungewiß werden.

Diesem Übelstand läßt sich — will man den weiteren Einfluß der einzelnen Faktoren bestimmen —, ausschließlich durch weitere *Beobachtungen* steuern.

Die Gleichungen enthalten die die *verschiedenen Zeitpunkte* betreffenden Werte der Veränderlichen und auch deren Veränderungsgeschwindigkeiten, also ihre Differentialquotienten gemäß dem Zeitverlauf (sogenannte Differenzen-Differentialgleichungen), ihre Lösung ergibt mithin für die zu ermittelnden Faktoren *an Stelle einzelner konstanter Werte die in der Zeit veränderlichen Reihen von Werten, d. h. deren Zeitfunktionen.*

Handelt es sich bei den so ermittelten Zeitfunktionen um monoton zu- oder abnehmende Funktionen, dann entsprechen sie den sogenannten *dauerhaften* (säkularen) *Veränderungen*, bestehen sie dagegen aus *zyklisch schwankenden* Gliedern, dann drücken sie die konjunkturellen Wellenbewegungen aus.

In unseren bisherigen Ausführungen haben wir die *wichtigeren Elemente* der auf die ökonometrischen Methoden der bürgerlichen Volkswirtschaftslehre aufbauenden sogenannten Konjunkturtheorien in großen Zügen bereits zusammengefaßt. Die dynamischen Gleichungssysteme streben danach, aus diesen Elementen ein einheitliches System auszubauen. Auf eine nähere Erläuterung der von Fall zu Fall angewandten mathematisch-ökonomischen Verfahren muß die vorliegende Abhandlung verzichten, obwohl dies das Verständnis bis zu einem gewissen Grade erschwert; dennoch mußten wir hiervon teils wegen des großen Umfanges der Materie, teils auch deshalb absehen, weil wir eines näheren Eingehens in den Stoff zur Kritik seines *Inhaltes* in diesem Fall gar nicht bedürfen, läßt sich doch nun die Frage schon so aufwerfen und auch beantworten: »Welche sind die Ziele und was ist der *Wert* dieser dynamischen Konjunkturdeutung?«

Die bürgerliche Konjunkturforschung der neuesten Zeit ist einerseits bemüht, durch vielseitige Anwendung der Methoden der mathematischen Statistik und insbesondere der statistischen Korrelation auf *induktivem* Wege die quantitativen Charakteristika der Zusammenhänge zwischen den Wirtschaftsfaktoren aufzudecken, andernteils mit den Mitteln der *Deduktion* durch Aufstellung von Theorien Gesetzmäßigkeiten festzustellen, um schließlich die Erfüllung ihrer Sätze in der Wirklichkeit zu prüfen und auch deren statistische Bestätigung zu suchen. Zur Vereinigung dieser beiden Methoden bedient sie sich der statistischen Korrelation.

Dieser neue Gesichtspunkt der Konjunkturforschung zeichnet sich durch einen grundlegenden Wechsel aus, indem er an die Stelle des unbequemen

Begriffes der Krise den undefinierten und weiten, zugleich aber auch weit bequemeren Begriff der wirtschaftlichen Wellenbewegung (Oszillation) setzt. *Krise* ist ein hartes, gehaltvolles, eindeutiges Wort, und der Kapitalismus hat für sie weder eine Entschuldigung, noch eine annehmbare Erklärung. Die Wellenbewegung ist ein Begriff gänzlich unbestimmten Inhaltes, sie kann ebenso groß und klein sein, Krisen aber gibt es nicht mehr, bloß Wellenbewegungen.

Diese Betrachtungsweise setzt sich zum Ziel, in das Wesen der *in der kapitalistischen Wirtschaftsordnung unvermeidlichen zyklischen Wirtschaftskrisen* tiefer einzudringen, ihren verheerenden Auswirkungen durch geeignete Maßnahmen vorzubeugen oder doch zumindest die großen Amplituden dieser Schwankungen zu verflachen und schließlich mit den Mitteln der Ökonometrie die wichtigeren Sätze der dynamischen »Theorie« zahlenmäßig zu bekräftigen.

Zweifellos eignen sich die Methoden der Mathematik *bis zu einem gewissen Grade* zur Klarstellung der zahlreichen quantitativen Zusammenhänge zwischen den Wirtschaftserscheinungen. So können einzelne konkrete Untersuchungen wertvolle Unterlagen zur Frage der Gestaltung und des Ablaufes einer oder mehrerer Erscheinungen, zur Frage ihrer Wertgestaltung in bestimmten Fällen sowie schließlich zum Problem der quantitativen Veränderungen dieser Werte usw. liefern.

Für die Kritik der Konjunkturforschungsarbeiten und der »Konjunkturtheorien« ist es jedoch *belanglos*, wie genau diese Berechnungen sind, wesentlich bleibt vielmehr *einzig und allein* die Frage, *ob diese Methoden und Berechnungen geeignet sind, eine grundsätzliche Erklärung für die inneren Gesetzmäßigkeiten der zyklisch wiederkehrenden Wirtschaftskrisen zu geben oder ihre Auswirkungen zu beheben.*

Das aber ist eben das Übel, daß sie sich gerade *hierzu nicht eignen*, denn ihre Untersuchungen *beschränken sich bloß auf die an der Oberfläche sich abspielenden Erscheinungen*, so daß sie deren *Ursachen und Ablauf* inmitten der ihrem Wesen nach anarchistischen Produktionsweise nicht im voraus überblicken und mithin auch kaum beeinflussen können.

Irgendwie muten all diese Berechnungen so an, als säße jemand in seiner Ferienbehausung und errechnete mit komplizierten mathematischen Operationen genau die Millionen Volt betragende Spannung, die die Blitze der einander folgenden sommerlichen Gewitter niedergehen lassen, ohne jedoch zu Ergebnissen über die Ursachen der Unwetter und über die Möglichkeiten zu ihrer Verhütung gelangen zu können.

Mit anderen Worten: Bei der Kritik dieser Betrachtungsweise steht es nicht zur Debatte, ob die so ausgearbeiteten Methoden etwa die quantitativen Veränderungen von Angebot und Nachfrage, die Preisveränderungsgeschwindigkeit, die dynamischen Veränderungen in der Nachfrage nach Produktions- und Verbrauchsgütern oder etwa die Dynamik der Gestaltung des Geldumlaufes

und des Kreditvolumens genau zu messen vermögen oder nicht, vielmehr stellt sich die Frage, ob die Wirtschaftslenkungsweise der heutigen kapitalistischen Produktionsordnung *imstande ist, die vermeintlichen Ursachen und deren schädliche Folgen abzuwenden oder zumindest ihre Auswirkungen in beachtlichem Maße abzuschwächen.*

Die bisherigen Erfahrungen beweisen eindeutig, daß das Experimentieren mit neuen Wegen von WICKSELL bis KEYNES weder die wiederholten Krisen des Kapitalismus zu beheben, noch ihr bisher bekanntes Wesen zu ändern vermochte. Dagegen läßt sich heute noch nicht behaupten, daß es nicht gelingen könnte, durch bessere Erkenntnis der quantitativen Zusammenhänge zwischen den Erscheinungen und im Zusammenhang damit durch *umfassende* staatliche Interventionen (besonders wenn die hierzu erforderlichen materiellen Mittel in genügender Fülle vorhanden sind) sowie durch bessere Organisation der Produktion und des Kredites die Krisenausschläge einigermaßen vorübergehend zu mildern.

Ein Kapitel für sich ist die Tatsache, daß sich die ökonometrischen Methoden und Berechnungen an sich als überaus nützlich erweisen, sofern man sie dazu benützt, wofür sie in Wirklichkeit verwendbar sind, d. h. zur Klarlegung der quantitativen Zusammenhänge zwischen gewissen Erscheinungen des Wirtschaftslebens, zur Bestimmung ihres Ablaufes und ihrer Veränderungen u. dgl. m. Hierzu bietet aber die sozialistische Planwirtschaft größere Erfolgsaussichten als die anarchistische Produktionsweise des Kapitalismus.

Die bürgerliche sogenannte allgemeine dynamische Wirtschaftstheorie *bedient sich einesteils der ökonometrischen Verfahren auch zu Zwecken, zu denen sie im allgemeinen nicht geeignet sind* (um nämlich durch Klarstellung der quantitativen Zusammenhänge zwischen den an der Oberfläche sich abzeichnenden Erscheinungen eine befriedigende Deutung für die grundlegenden Widersprüche des Kapitalismus zu geben), während sie anderenteils mit Hilfe dieser Methoden einzelne mathematische Zusammenhänge tendenziös und bewußt derart einstellt, daß die aus ihnen zuziehenden Folgerungen die monopolistische Staatsführung zu wirtschaftlichen Entschlüssen und Interventionen veranlassen, die die Last der Krisen den weiten Kreisen der Arbeiter und Werktätigen aufbürden.

Das Wirken der hervorragenden Vertreter der dynamischen Wirtschaftsbetrachtung darf denn auch *alles andere denn unnütze und vergebliche Zeitvergeudung* genannt werden. Waren sie auch außerstande, die Ursachen der Krisen in annehmbarer Weise zu deuten, so trugen sie doch in hohem Maße zur Verfechtung der Interessen einzelner monopolistischer Gruppen bei. Die in den letzten Jahren über Krisen und Wirtschaftszyklen oder über verwandte Themen erschienenen größeren Werke, wie die Bücher von W. RÖPKE, J. SCHUMPETER und A. HANSEN sowie von J. M. KEYNES sind — wenn auch auf

unterschiedlichen Wegen und auf Grund verschiedener Überlegungen — sämtlich bestrebt, den Nöten des Kapitalismus Abhilfe zu schaffen und dem ungünstigen Konjunkturablauf eine Wendung zum Besseren zu geben.

RÖPKE und KEYNES können gleicherweise zu den Anhängern jener Richtung gezählt werden, die die Konjunkturschwankungen mit der sogenannten *monetären Überkapitalisierung* erklären, und dennoch kann man sich kaum einen größeren Unterschied zwischen zwei im wesentlichen die gleiche Wirtschaftsordnung vertretenden und einem gemeinsamen Endziel — der Rettung des Kapitalismus — verbundenen Denkern vorstellen als zwischen diesen beiden.

Die Lektüre ihrer Bücher läßt sogleich den augenfälligen, grundlegenden Unterschied zwischen ihnen erkennen. Während RÖPKE viel besser schreibt als er zu denken vermag, denkt KEYNES weit besser als er schreibt oder sich zu schreiben bemüht, denn auch mit seiner komplizierten, oft schwer verständlichen Ausdrucksweise, mit seinen unklaren, frei erfundenen technischen Wortbildungen dient er dem gesteckten Ziel, der »wissenschaftlichen« Rettung des Monopolkapitalismus.

RÖPKE ist der besessene Schwärmer für den selbsttätigen, spontanen Automatismus in der kapitalistischen Wirtschaft und der unverbesserlich liberale und beredte Verfechter einer ganzen Reihe nicht nachweisbarer, nicht verfechtbarer Sätze.

KEYNES hingegen kann man bei weitem nicht mehr einen Eiferer für den spontanen Automatismus nennen, ist er doch nur zu sehr geneigt, im Interesse seiner monopolistischen Schützlinge über die Notwendigkeit der *staatlichen Intervention* zu meditieren.

RÖPKES ganzer Abscheu und seine uneingeschränkte Verachtung gilt eben diesen staatlichen Eingriffen. Die Lektüre seiner Bücher weckt in uns die Erinnerung an Perikles' berühmte Rede zu Ehren der Toten des Peloponnesischen Krieges, die vom fast trunkenen Stolz des Atheners auf seinen Stadtstaat und auf dessen Lebensform, aber auch von seiner verachtenden Voreingenommenheit gegenüber den »*anders lebenden*« Spartanern überströmt. Von einem »*Anders-Leben*« wünscht RÖPKE ebensowenig zu hören wie seinerzeit Perikles, für den es gleichfalls unvorstellbar war, daß es außer Athen auch ein anderes nachahmenswertes Beispiel geben könne.

Als Beschützer des wirtschaftlichen Automatismus und *verschworener Feind jedweder staatlicher Eingriffe* schreibt RÖPKE, der Tausendfüßler bewege sich auf allen seinen Gliedmaßen zugleich, weil er dies *instinktiv* tue, sobald man ihm jedoch *vorschriebe*, wie er diese Bewegungen auszuführen habe, geriete er sogleich in Verwirrung und könnte sich nicht mehr fortbewegen. Seines Erachtens führe jede sogenannte »*nicht konforme*«, d. h. jede staatliche Intervention, die mit dem Preissystem und der Eigenregelung des Marktes nicht im Einklang steht, letzten Endes unweigerlich zum Kollektivismus.

Trotzdem sein Werk über die Krisen 1936, d. h. nach der schweren Krise der Jahre 1929—1930 erschien, macht er bei der Analyse des Krisenproblems fast den Eindruck, als *suchte er gar nicht nach einem Heilmittel* für die Krankheit, die er untersucht, und fände es natürlich auch nicht. Über die *Unterkonsumtheorie* schreibt er beispielsweise, die populäre Alternative, das Gesamteinkommen gehe zurück, weil der Unternehmer dem Arbeiter für seine Arbeit keinen ausreichenden Lohn bezahle, bedürfe nicht erst der ausführlicheren Widerlegung. Offenbar übersehe diese Auffassung, daß die Kaufkraft der Unternehmer in diesem Falle um denselben Betrag ansteige, um den die Kaufkraft der Arbeiter sinke, im Endresultat ändere sich also an der Gesamtkaufkraft nicht das geringste.«*

Sich mit einer derart tendenziösen und jeder Grundlage entbehrenden Behauptung auseinanderzusetzen ist offenbar überflüssig.

Schließlich lehnt er — abweichend von KEYNES — die mathematischen Methoden als Mittel zur Untersuchung wirtschaftlicher Erscheinungen ab.

Einer Lösung des Krisenproblems könne man seiner Ansicht nach nur durch die gesellschaftswissenschaftliche Analyse näherkommen, und die mathematisch-statistischen und empirischen Methoden mit ihren Korrelationskoeffizienten, Trendberechnungen und beweglichen Mittelwerten böten keine Handhabe zum Verständnis der Frage.**

Scharf kritisiert er auch die Prognosen der sogenannten »Harward-Barometer«, wobei er als Beispiel die Anekdote vom Militärarzt zitiert. Einem an Typhus schwer erkrankten und für unrettbar gehaltenen Infanteristen wird durch einen Irrtum zum Mittagessen Sauerkraut gereicht, das er auch verzehrt, worauf sich sein Zustand auffallend rasch bessert. Der Militärarzt folgert hieraus, Sauerkraut sei ein wirksames Heilmittel gegen Typhus. Diese seine »wissenschaftliche« Erkenntnis erprobt er denn auch bei nächster Gelegenheit an einem gleichfalls typhuskranken Artilleristen, doch stirbt der Patient sogleich nach dem Genuß des Sauerkrauts. Der hervorragende Militärarzt gelangt daraus zu der Schlußfolgerung, Sauerkraut sei mit Sicherheit ein vorzügliches Heilmittel gegen Typhus, seine Wirksamkeit hänge jedoch letzten Endes von der Waffengattung ab (all depends on the arms).*** Eine den Schlußfolgerungen des Militärarztes ähnliche »wissenschaftliche« Bedeutung mißt RÖPKE auch den verschiedenen Konjunkturprognosen bei. Seines Erachtens hängen derartige Prognosen von einer so großen Zahl Veränderlicher ab, daß es keine Möglichkeit gibt, sie in ihrer Gesamtheit im voraus entsprechend bewerten und wägen zu können.

Die Krisentheorie wird bei ihm zur Theorie des wiederkehrenden Aufschwunges, dem natürlicherweise die Depression folgt. Die Krise ist der Preis,

* Crises and Cycles, S. 85.

** Crises and Cycles, S. 67.

*** Crises and Cycles, S. 67.

der in der kapitalistischen Wirtschaft für die zunehmende gesellschaftliche Arbeitsteilung und zugleich für das starke Ansteigen der Produktivität zu entrichten ist. Wer nicht geneigt ist, dies auf sich zu nehmen, der kehre zurück zur primitiven Lebensweise Robinsons.*

Der Aufschwung muß mithin — nach RÖPKE — um den Preis des Ertragens der ihm notwendigerweise folgenden Krise erkaufte werden. Offen bleibt die Frage — und auch RÖPKE läßt sie wohlweislich unbeantwortet —, wer diesen Preis bezahlen, und warum und wovon er bezahlt werden soll.

Sollen es die kapitalistischen Monopole sein, die sich in den sieben fetten Jahren auch für die folgenden sieben mageren Jahre reichlich versorgen, oder jene vom Lohn lebenden Arbeiter und Werktätige, die selbst zur Zeit des Aufschwunges bestenfalls bloß ihren nackten Lebensunterhalt sichern können.

Weit zielstrebigere als RÖPKE ist KEYNES in seinen Gedankengängen über den Ablauf der Konjunkturen. Es war das Wirken KEYNES' und seiner Jünger, das auf die neueste Entwicklung der Konjunkturforschung wohl den nachhaltigsten und größten Einfluß ausübte. Besonders seine Feststellungen über die Gestaltung des Nationaleinkommens, der Investitionen und des Verbrauchs, über die Verbrauchsfunktion sowie über den Multiplikator dienten als Ausgangspunkte für die ökonomische Untersuchung der dynamischen Vorgänge des Wirtschaftslebens. Ergänzt werden diese Begriffe noch durch die Untersuchungen seiner Jünger über Rolle und Bedeutung des Akzelerators.

An dem Gedankengang KEYNES' in seinem ersten großen Werk läßt sich der Einfluß WICKSELLS genau verfolgen. Außer diesem weckten die Konjunkturdeutungen TUGAN-BARANOVSKIS, SCHUMPETERS und SPIETHOFFS sein besonderes Interesse.

WICKSELLS Auffassung fußt auf der Grundlage, daß die Güter im allgemeinen und mithin auch die Produktionsgüter im Verhältnis zu den Bedürfnissen nur in knappen, beschränkten Mengen zur Verfügung stehen. Infolgedessen können die Produktionsgüter, die vermittelt der dank den Ersparnissen aus der Verbrauchsgüterproduktion frei gewordenen Produktionsfaktoren erzeugt werden, stets mit Gewinn investiert werden. Das Gleichgewicht zwischen Ersparnissen und Investition sichert der Zinsfuß, sofern die Banken Kredite nur bis zur Höhe der Ersparnisse gewähren. In diesem Fall bleibt das Geld neutral und stört die Funktion des Preissystems nicht, das die Aufrechterhaltung des wirtschaftlichen Gleichgewichtes sichert. Senken die Banken den Marktzinsfuß unter das Niveau des natürlichen Zinsfußes, dann kommt ein sogenannter *kumulativer Vorgang* zustande, bei dem die Erhöhung der Einkommen die Preise der Verbrauchsgüter weiter ansteigen läßt und auch zu weiteren Investitionen anregt. Dieser sich selbst stärke Vorgang führt letzten Endes zur Störung des Gleichgewichtes und zur Krise. WICKSELLS Kon-

* Crises and Cycles, S. 71.

junkturtheorie steht in enger Verwandtschaft mit der Zinstheorie BÖHM-BAWERKS, so daß sie auch die Zustimmung einzelner prominenter Vertreter der sogenannten österreichischen Schule fand.

WICKSELL erkannte richtig, daß der Unternehmergewinn bei sinkendem Zinsfuß ansteigt und daß der erhöhte Gewinn den Unternehmer zu gesteigerter Aktivität anspornt. Seine Theorie basiert auf dem Satz von der Knappheit der Güter, er bezweifelt also auch nicht, daß für die dank der Spartätigkeit frei gewordenen Produktionsmittel Möglichkeiten zu gewinnbringender Investition offen bleiben. WICKSELLS *entscheidender Irrtum* läßt sich — vom marxistischen Standpunkt gesehen —, dahingehend zusammenfassen, daß die Höhe des Unternehmergewinnes nicht vom Zinsfuß, sondern von der Höhe des zur Aufteilung gelangenden *realisierten Gesamtmehrwertes* abhängt. Die Unternehmer werden nämlich solange investieren, bis dies die Höhe des realisierten Mehrwertes ihrer Voraussicht gemäß als berechtigt erscheinen läßt. Die Gestaltung des realisierten Mehrwertes jedoch hängt letztlich von der Gestaltung der Verbrauchsfähigkeit der Gesellschaft ab. Sobald die beständig zunehmende Produktion mit der geringen Verbrauchsfähigkeit der Massen nicht mehr im Einklang steht, verschlechtern sich auch die Möglichkeiten zur Realisierung des Mehrwertes, und dies ist es, was im Endresultat die Krisen verursacht. WICKSELL hingegen *verwechselt die Erscheinungsform der Krise mit ihrer Ursache* und behauptet, die Verwertungsmöglichkeiten für das Kapital verschlechterten sich als Folge der von den Banken vorgenommenen Zinsfußerhöhung.

Der Einfluß dieser Gedankengänge WICKSELLS zeigt sich unverkennbar in KEYNES' *erstem* Werk, im »Treatise on Money«. In seinem *zweiten* großen Werk gibt KEYNES eine von WICKSELL völlig abweichende Deutung der Konjunkturvorgänge.

Die *im zweiten Werk* KEYNES' enthaltene Theorie geht von dem Satz aus, die Höhe des Nationaleinkommens eines Landes hänge von der Vollbeschäftigung ab, während diese eine Funktion der *wirksamen Nachfrage* darstelle.

Die wirksame Nachfrage setzt sich aus der Nachfrage nach Verbrauchsgütern und nach Produktionsgütern zusammen.

Bei der Untersuchung der Nachfrage nach Verbrauchsgütern geht KEYNES von der bereits erörterten Verbrauchsfunktion aus, um festzustellen, daß die Nachfrage nach Verbrauchsgütern von der ebenfalls bereits besprochenen *Grenzneigung zum Verbrauch* abhängt. Nach KEYNES erhöht der Mensch bei steigendem Einkommen auch seinen Verbrauch, doch steigt dieser *nicht verhältnismäßig* mit der Erhöhung des Einkommens, sondern in wesentlich geringerem Umfang. Bezüglich der Verbrauchsfunktion verweisen mehrere bürgerliche Autoren, so u. a. PAULSEN* darauf, daß die Höhe des Verbrauchs *nicht allein durch die Höhe des zum untersuchten Zeitpunkt zur Verfügung stehen-*

* Paulsen: »Neue Wirtschaftslehre«, S. 292.

den Einkommens bestimmt wird. Hat sich zum Beispiel der Verbrauch auf ein im Zuge einer Konjunktur erreichtes Einkommen von gewisser Höhe eingestellt, und sinkt das Einkommen während der Depression, dann folgt der Rückgang des Verbrauchs der Verminderung des Einkommens nicht im gleichen, sondern in einem geringeren Maß, doch gehen dementsprechend die Ersparnisse zurück. Erreichen hingegen die Einkünfte der Verbraucher bei ansteigender Konjunktur ihren früheren höchsten Stand, und zeigt sich auch eine steigende Tendenz bei den Einkommen, dann erhöhen sich Einkommen und Verbrauch verhältnismäßig.

Dem marxistischen Standpunkt gemäß leidet die Verbrauchsfunktion an ganz anders gearteten Mängeln. KEYNES führt nämlich die ungenügende Nachfrage nicht auf die inneren Widersprüche der kapitalistischen Produktion zurück, sondern leitet sie von der Natur des Menschen und von psychologischen Gesetzen ab. Angesichts derartiger psychologischer Deutungen wirft sich aber die Frage auf, welche Gesellschaftsklasse, die der Kapitalisten oder die der Arbeiter es ist, von deren seelischer Einstellung und materiellen Möglichkeiten er spricht, liegt es doch klar auf der Hand, daß diese beiden Klassen wegen der grundverschiedenen Gestaltung ihrer Einkünfte nicht mit gleichem Maß gemessen werden können. Auch über die inneren Entwicklungsgesetze des Kapitals hüllen sich KEYNES' psychologische Überlegungen in Schweigen, wie auch darüber, daß die organische Zusammensetzung des Kapitals im Zuge der kapitalistischen Reproduktion ansteigt, so daß auch die Verbrauchsfähigkeit der vom Lohn lebenden Arbeiterschaft relativ ständig zurückgeht. KEYNES schweigt auch davon, daß sich — wieder den Wachstumsgesetzmäßigkeiten des Kapitalismus entsprechend —, infolge der zunehmenden Konzentration und Zentralisation ein stets größeres Vermögen in den Händen einer immer geringeren Zahl von Menschen anhäuft, und daß der persönliche Verbrauch dieser Schichten mit dieser starken Erhöhung ihrer Einkommen naturgemäß nicht Schritt zu halten vermag. KEYNES' grundlegendes psychologisches Gesetz über die Verbrauchsgestaltung ist ein Versuch, die sich beständig verschärfenden Klassengegensätze mit in Wirklichkeit unhaltbaren psychologischen Deutungen zu übertünchen.

Die wirksame Nachfrage nach Produktionsgütern hängt nach KEYNES in erster Linie von der Höhe der Investitionen ab, die ihrerseits durch zwei Faktoren beeinflußt werden, u. zw. einerseits durch den Marktzinsfuß, andererseits durch die Grenzproduktivität des Kapitals. Den Zinsfuß bestimmen das Geldangebot und die Kreditpolitik sowie die Höhe der Liquiditätsnachfrage, während die Grenzproduktivität des Kapitals von den Kosten der letzten, noch zur Investition gelangenden Güter und vom Grenzertrag des investierten Kapitals abhängt. In der Fassung von KEYNES schreibt sich die Investitionsfunktion zu

$$I = I(r, i).$$

In dieser Beziehung bildet *die Investition das dynamische Element* des Konjunkturablaufs. KEYNES erklärt den kennzeichnenden Ablauf der Konjunktur auch damit, daß er die Grenzproduktivität des Kapitals als ungewisser, weniger stabil bezeichnet als die Zinsfußänderung. *Bei der Beurteilung der Grenzproduktivität des Kapitals spielen wieder psychologische Faktoren die entscheidende Rolle*, vor allem die Frage, mit welchem künftigen Konjunkturablauf die Unternehmer rechnen. KEYNES geht so weit, die Konjunkturschwankungen geradeswegs auf den irrigen Optimismus bzw. Pessimismus der Unternehmer zurückzuführen, wofür er auch ein Beispiel anführt, indem er erklärt, daß Investitionen, die bei Vollbeschäftigung 2% abwerfen würden, im ansteigenden Abschnitt eines Zyklus so angelegt und auch so bewertet werden, als trügen sie 6%. Bei rückläufiger Konjunktur hingegen löst diesen Irrtum eines unbegründeten Optimismus der Irrtum des Pessimismus ab, und Investitionen, deren Ertrag bei voller Ausnutzung 2% erreichen würde, werden nun als wertlos betrachtet. Schließlich führen diese Irrtümer so weit, daß die bei Vollbeschäftigung 2% abwerfende Investition eben mangels einer solchen in der Tat ertraglos bleibt.* KEYNES lehnt die Auffassung ab, die man etwa bei RÖPKE antrifft, die Krise stelle jenen Preis dar, der für die größere Produktivität im Hochkapitalismus entrichtet werden muß. Das wirksame Heilmittel gegen »Konjunkturschwankungen« sei — so meint KEYNES —, nicht die Vermeidung des Zustandes der Vollbeschäftigung und damit die Aufrechterhaltung einer ständigen Halb-Depression im Wirtschaftsleben, sondern die Schaffung einer konstanten, gewissermaßen ansteigenden Konjunktur durch Behebung der Depression.*

Eine besondere Wichtigkeit für die Deutung des Konjunkturablaufs kommt in seiner Theorie der Tatsache zu, daß er die Größe des Verbrauchs über die Verbrauchsfunktion mit der Einkommenshöhe in Zusammenhang bringt und mit seinem Multiplikator nachweist, die sich fortpflanzende Auswirkung der Investitionen löse eine weitere belebende Wirkung im Wirtschaftsleben aus. Mit diesen beiden Begriffen vermag zwar KEYNES den vollen Auslauf der Konjunkturbewegung nach oben zu erklären, doch ist er außerstande, eine Begründung dafür zu geben, wie es zum Umschlagen aus dem ansteigenden in den rückläufigen Abschnitt des Zyklus kommt. Aus diesem Grunde ergab sich für ihn die Notwendigkeit, die Grenzproduktivität des Kapitals einer Untersuchung zu unterziehen, wobei er zu der Feststellung gelangte, das Umschlagen der Konjunktur von einer ansteigenden zur rückläufigen hänge mit der Grenzproduktivität des Kapitals zusammen, die ihrerseits durch die *irrig optimistische bzw. irrig pessimistische Voraussicht* der Unternehmer bestimmt wird.

* General Theory, S. 321.

Mit seinen Schlußfolgerungen aus der Grenzproduktivität des Kapitals wurde KEYNES — wie dies Gy. GÖNCÖL* treffend bemerkt —, zum Propheten der Devaluation, ja nötigenfalls der *vorsätzlichen Entwertung* des Geldes: der Vorschlag dieser Heilmethode schließt — ebenfalls nach GÖNCÖL — einen doppelten Nutzen in sich: Das in inflationistischer Weise ansteigende Preisniveau bildet nämlich einesteils einen der Faktoren zur Steigerung der Grenzproduktivität des Kapitals, andererseits erhöht es den Profit durch unmittelbare Senkung der Reallöhne. GÖNCÖL setzt sodann in seinen Ausführungen über diese Frage fort: »Keynes müht sich nicht nur mit der irrealen Aufgabe ab, den Parasitismus vom Kapitalismus abzuoperieren...., sondern.... auch mit der Frage, auf welche Weise die Funktionsfähigkeit des kapitalistischen Wirtschaftssystems unter Berücksichtigung des Schmarotzertums des Kapitals gesichert werden könnte.«

Dem marxistischen Standpunkt gemäß ist KEYNES' Feststellung, die Profitrate nehme mit zunehmender Entwicklung des Kapitalismus und mit der Zunahme des Wohlstandes der Gesellschaft ab, während der Zinsfuß einer konstanten Größe zustrebe, absolut unhaltbar und kommt einer *völligen Verwirrung des Zinsbegriffes* gleich. In seiner Fassung bildet jener Teil des Profits, den der Kapitaleigentümer in Gestalt des Zinses erzielt, die Frucht des Kapitals, das Ergebnis des Kapitals als einer materiellen Gütermenge. Der andere Teil des Profits, der als Unternehmergewinn dem industriellen Kapitalisten zusteht, bildet im Gegensatz zum Zins und unabhängig von den Eigentumsrechten am Kapital den Lohn des Unternehmers für seine Arbeit. KEYNES trennt somit den Zins von den wirklichen Grundlagen zu seinem Verständnis, von der Bewegung des Darlehenskapitals, und behauptet deshalb, der Zinsfuß sei eine rein geldliche Erscheinung, die beständig unter dem Einfluß psychologischer Faktoren steht. Den Begriff des Zinses trennt er somit künstlich von dem des Profits mit dem offenkundigen Ziel, eine künstliche Wechselwirkung zwischen den Veränderungen des Zinses und der Profitrate zu schaffen, trotzdem der Zins in Wirklichkeit einen Abzug vom Bruttoprofit darstellt, seine Höhe also letzten Endes von der Höhe des Profits abhängt. Im Endresultat besteht also zwischen Profitbewegung und Bewegung des Zinses auch insofern ein Abhängigkeitsverhältnis, als sich — unter anderen — in erster Reihe die Gestaltung des Profits auf Angebot und Nachfrage nach Darlehenskapital auswirkt, und — ebenfalls unter anderen — vornehmlich Angebot und Nachfrage nach Darlehenskapital den Zinsfuß beeinflussen.**

* Gy. Göncöl: »Kampf des Marxismus-Leninismus gegen die vulgäre Apologetik« (S. 17). Einleitung zur ungarischen Übersetzung des Buches »Political Economy and Capitalism« von M. Dobb. Volkswirtschaftlicher und Juristischer Verlag, Budapest, 1958.

** In seiner erwähnten Studie ergeht sich Göncöl in äußerst interessanter Weise über die Anstrengungen Keynes' sowie der österreichischen und der schwedischen Schule zur theoretischen Begründung des Zinses.

Demnach waren letztere bemüht, den Zins durch Einsatz der »Produktionsumweg«-

Im Mittelpunkt der KEYNESSchen Theorie steht als Ursache der Konjunkturschwankungen die optimistische oder pessimistische Voraussicht der Unternehmer, der Konjunkturablauf hängt mithin bei ihm von ihrer optimistischen oder pessimistischen Anschauung ab. *Dem Standpunkt des Marxismus gemäß ist eben das Gegenteil richtig*, denn sowohl im ansteigenden als auch im rückläufigen Abschnitt des Zyklus ist es der steigende und weiter anwachsende bzw. der rückgängige und ständig abnehmende Profit, der die Unternehmer optimistisch oder pessimistisch stimmt. Auf derselben Auffassung beruht auch KEYNES' zutiefst antisoziale Folgerung, die Unternehmerlust könne auch durch die *Senkung der Arbeitslöhne* angespornt werden, bildet doch seines Erachtens der ungenügende Unternehmerprofit die Ursache der Krise, die einzige Möglichkeit zur Niederkämpfung von Krise und Arbeitslosigkeit biete sich also, wie er sagt, in der Erhöhung des Unternehmerprofits. Sorgt der Staat nicht durch Einsatz seiner eigenen Mittel für eine optimistische Einstellung der Unternehmer, oder — mit anderen Worten — intensiviert die monopolistische Staatsführung nicht ihre Intervention zur Erhöhung der Monopolprofite, dann läßt sich die optimistische Stimmung der Unternehmer, ohne die die Krise unvermeidlich eintritt, keineswegs sichern.

Am gesamten Lebenswerk KEYNES' zeichnet sich deutlich das Bestreben ab, durch die aus seinen verschiedenen dynamischen Untersuchungen abgeleiteten Schlußfolgerungen und Methoden die Möglichkeit von Krisen auszuschießen.

Der idealistische Philosoph ORTEGA y GASSET zitiert in seinem Buch* ein volkstümliches spanisches Distichon, das da besagt, der eine Papst verlasse seinen Thron, um seinen Glauben zu retten, der andere Papst hingegen verleugne seinen Glauben, um den Thron zu behalten.

KEYNES Bemühungen erinnern lebhaft an den letzteren der beiden Päpste. Im Interesse einer konsequenten Durchführung seiner auf die Intervention des monopolistischen Staates hinauslaufenden Vorschläge wird er, um den wankenden Thron der Herrschaft der Monopole zu retten, selbst dem Glauben seiner klassischen Vorgänger an die selbstregelnde Kraft der kapitalistischen gesellschaftlichen Produktion untreu.

Theorie aus dem Produktionsprozeß als dessen »natürliche« Folge herzuleiten (der Zins stellt die Entschädigung für die Wartezeit dar).

Wie stimmt diese »natürliche« Zinsrate mit dem auf dem Kapitalmarkt zustande kommenden Marktzinsfuß überein?

Keynes ist nicht verlegen und hilft sich, indem er die Kategorie des »Realzinses« und zugleich mit diesem jeden Versuch ablehnt, den Zins als volkswirtschaftliche Kategorie aus dem Produktionsprozess herzuleiten; er schlägt demgegenüber die rein monetäre Theorie des Zinses vor.

* Ortega y Gasset: »El Tema de Nuestro Tiempo« (Die Aufgaben unserer Zeit), ungarische Übersetzung, Budapest 1944, S. 26.

V.

Die Krisenerklärung bei Marx

Eine Abwägung der »Feuerkraft« des gesamten geistigen Arsenal der allerneuesten bürgerlichen, sogenannten dynamischen Wirtschaftstheorie vermag trotz der gelungenen Aufdeckung der Zusammenhänge zahlreicher wichtiger Detailfragen nicht davon zu überzeugen, daß sie auch nur eine einigermaßen befriedigende, überzeugende Antwort auf die Feststellungen der marxistischen Krisentheorie bietet.

Der *marxistischen Krisentheorie* gemäß sind Entstehung und Vertiefung der Krisen eine der kapitalistischen Produktionsweise entspringende *Notwendigkeit*.

Der *grundlegende Widerspruch der kapitalistischen Produktionsweise* ergibt sich aus dem Widerspruch zwischen dem gesellschaftlichen Charakter der Produktion und dem kapitalistischen Charakter der Aneignung. Diesen grundlegenden Widerspruch umgehen sowohl KEYNES als auch seine Jünger konsequent, indem sie sich der Wirklichkeit verschließen, ja das Problem gar nicht erst aufwerfen.

Die Verheimlichung der *wahren Krankheitsursache* aber führt niemals zur Heilung.

Nach der marxistischen Fassung folgt ferner aus dem grundlegenden Widerspruch der kapitalistischen Produktionsweise der weitere *Widerspruch zwischen dem Streben nach unbeschränkter Produktionssteigerung einerseits und der beschränkten Entwicklung des Marktes andererseits*.

Die kapitalistische Krise entstammt demnach in erster Linie *nicht dem ungenügenden Verbrauch, sondern der Überproduktion*. Das Streben nach unbeschränkter Ausweitung der kapitalistischen Produktion gelangt in Widerspruch mit dem ungenügenden Verbrauch der Massen; dieser letztere führt früher oder später auch zu einem Rückgang der Nachfrage nach Produktionsmitteln, die Produktion übersteigt (bei den gegebenen Preisen) in *allen* Gütern die Aufnahmefähigkeit des Marktes, es tritt eine Überproduktion ein, und diesen Widerspruch zwischen Produktion und Markt vermag vorübergehend *einzig und allein die Krise zu lösen*.

Aus der kapitalistischen Produktionsweise, aus dem grundlegenden Widerspruch, der zwischen der Vergesellschaftlichung der Produktion, d. h. der gesellschaftlichen Arbeitsteilung einerseits und der individuellen Enteignung andererseits besteht, folgt jener Widerspruch, jene Eigenheit, derzufolge die anarchistisch ungeordnete Produktionsweise notgedrungen zur *uneinheitlichen Entwicklung* und zum *Entstehen von Disproportionen* zwischen den Teilen und Sphären der gesellschaftlichen Produktion führt.

Auch dieses Mißverhältnis ist mithin eine Fortentwicklung des aus dem

gesellschaftlichen Charakter der Produktion und dem kapitalistischen Charakter der Aneignung resultierenden Widerspruchs.

Schließlich setzt sich dieser Widerspruch in jenem weiteren widersprüchlichen Prozeß fort, der zwar eine Verbesserung der Kapitalsverwertung anstrebt, zugleich aber minder gute Verwertungsmöglichkeiten schafft, weil sich die zur Kompensierung der Profitratensenkung, also zur Erhöhung der Profitmenge geeigneten Mittel, die Steigerung der Konzentration und der technische Fortschritt (die Erhöhung der organischen Zusammensetzung des Kapitals) in Richtung einer weiteren Senkung der Profitrate auswirken, und weil zur *Kompensation der rückläufigen Profitrate die Erhöhung der Profitmasse durch Akkumulation und weitgehende Steigerung der Konzentration zwangsläufig notwendig ist.*

Nach MARX stellt die *Ungleichheit* der wirtschaftlichen und der politischen Entwicklung ein *unbedingtes* Gesetz des Kapitalismus dar.

Die Bedeutung der vier Zyklen der kapitalistischen Reproduktion, der Krise, der Depression (oder Stagnation), der Belebung und des Aufschwunges, ist — dem marxistischen Standpunkt gemäß — keineswegs gleich, denn die *Grundlage und das bestimmende Moment des Zyklus bildet die Krise.* Die Depression ist bloß deren Folge, während Belebung und Aufschwung teils *vorbereitende* Stufen des notwendigen Prozesses der Krisenüberwindung bzw. der Weiterentwicklung des Vorganges darstellen, die andererseits unausweichlich in *neue Krisen* münden.

Der Marxismus lehnt mithin die verschiedenen Konjunktur- und Zyklentheorien ab, weil es ausschließlich die Krisentheorie ist, die die allgemeinen Widersprüche der kapitalistischen Produktionsweise zu erklären vermag.

Indessen geben der grundlegende Widerspruch der kapitalistischen Produktionsweise und die aus diesem folgenden weiteren Widersprüche keine Erklärung für die *Periodizität*, für die in regelmäßigen Zeitabständen eintretende Wiederkehr der Krisen.

Die Erfahrung hat gelehrt, wie wenig stichhältig Krisendeutungen wie etwa diejenige von JEVONS sind, der die Krisen letzten Endes den Witterungsverhältnissen und im Zusammenhang mit diesen den schwankenden Ernteerträgen zuschreibt, denn bei den modernen Krisen handelt es sich in erster Linie um solche *industrieller* Natur. Auch liegen die Getreidepreise zur Zeit des Aufschwunges einmal hoch, wie zwischen 1823 und 1825, ein anderes Mal niedrig, wie etwa von 1833 bis 1836, und schließlich brechen Krisen bald zur Zeit schlechter (1847), bald zur Zeit guter Ernten (1857) aus.

Als gesellschaftliche Erscheinung deutet der Marxismus die Krise mit den sozialen Gesetzen.

Die Grundlage der Periodizität der Krisen bildet — nach MARX — *der Umschlag des fixen Kapitals.* Der Umschlag der einzelnen Teile des produzierenden Kapitals erfolgt *auf verschiedene Art.*

Über jenen Teil des Kapitals, der zur Anschaffung von Gebäuden, Maschinen und Werkzeugen dient, schreibt MARX,* dieser in den Arbeitsgeräten angelegte Teil des Kapitalwertes mache den gleichen Umlauf mit, wie seine übrigen Teile. Der Umlauf des so in Augenschein genommenen Kapitalteiles ist indessen ganz eigenartig. Bloß sein Wert läuft allmählich, nach und nach, u. zw. in dem Maße um, in dem er in das als Gut in den Verkehr gelangende Produkt übergeht. Der restliche Teil seines Wertes bleibt während der ganzen Zeit seiner Funktion in ihm ständig fix angelegt. *Nicht in seiner Gebrauchsform* läuft es um, vielmehr behält es in seiner Gebrauchsform seine Selbständigkeit jenen Gütern gegenüber, an deren Erzeugung es teilnimmt. Dieser seiner Eigenart wegen nimmt dieser Teil des konstanten Kapitals die Form des *fixen Kapitals* an. Der Umschlag jener Wertteile des produktiven Kapitals, die zur Beschaffung von Arbeitskraft und von nicht fixes Kapital darstellenden Produktionsmitteln verwendet werden, mit anderen Worten, der Umschlag des *Umlaufkapitals*, ist wieder eine Sache für sich.

Der Umschlag des fixen Kapitals hängt von der Abnutzung ab, die sich unter der Einwirkung der *Naturkräfte* (z. B. der Witterung) oder des Gebrauchs, ferner als Folge des als moralischer Verschleiß bezeichneten *Veraltens* einstellt. Mit fortschreitender Entwicklung der Technik wird die Abnutzung des fixen Kapitals allerdings mehr und mehr zu einem *Veralten*, zu einer Funktion der Wertverhältnisse (Preis, Selbstkosten, Profitverhältnisse) und in immer geringerem Maße zu einer Funktion des materiellen Verschleißes. Freilich spielt unverändert auch dieser eine Rolle, doch ist es in zunehmendem Umfang der moralische Verschleiß, der die Notwendigkeit der Erneuerung bestimmt, u. zw. stets in kürzeren Fristen, als es dem Voranschreiten des materiellen Verschleißes entspräche.

Die moralische Abnutzung aber wird vornehmlich durch die Krise herbeigeführt. Die Depression nach der Krise hält so lange an, bis sich die während der Krise explosionsartig zutage getretenen Widersprüche mehr oder minder gelockert haben, worauf die durch die Krise verursachte moralische Abnutzung zur Erneuerung des fixen Kapitals zwingt. Die wachsende Nachfrage nach Produktionsgütern und gemeinsam mit diesen die wachsende Nachfrage nach Arbeitskräften beleben das Wirtschaftsleben, und diese Belebung kann sich bis zum Aufschwung steigern. Ausgangspunkt ist also jedenfalls die Krise. Im Abschnitt des Aufschwunges ziehen die Preise an, der Profit erhöht sich, und jedermann trachtet, sein fixes Kapital zu erneuern, um die Konjunktur so weit als möglich zu nutzen; die reger werdende Nachfrage nach Darlehenskapital übersteigt das Angebot, dies aber führt zur Erhöhung des Zinsfußes.

Der Mechanismus der günstigen Konjunktur läßt das Wirtschaftsleben über jenen Punkt hinaus-schwingen, bis zu dem der Markt — bei anziehenden

* Marx: »Das Kapital«, ung. Ausgabe, II. Band, S. 160.

Preisen, steigenden Profitraten usw. — die Verbrauchs- und Produktionsgüter aufzunehmen noch imstande wäre, d. h. über jenen Punkt hinaus, bis zu dem der die Konjunktur in Bewegung haltende Profit noch realisierbar ist. Es kommt zu der anfangs noch verborgenen Überproduktion. Sobald die Mißverhältnisse in der Produktion, die alles umfassende Disproportion von Angebot und Nachfrage offenkundig werden, bricht die Krise aus, und die während dieser sowie im Abschnitt der Depression zustande kommenden Preis-, Selbstkosten- und Profitverhältnisse machen selbst das erneuerte fixe Kapital zu einem »moralisch abgenutzten«. Sowie die »Erleichterung« der Wirtschaft in der Depression eingetreten ist, wird die Erneuerung des fixen Kapitals von neuem zu einem unbedingten Gebot. Beträgt seine Lebensdauer in den wichtigsten Zweigen der Großindustrie gegenwärtig z. B. 8 Jahre, dann bildet dieser mehrjährige Zyklus der zusammenhängenden Umschläge die Grundlage der Periodizität der Krisen.

(In ihrem Kampf um die Absatzmärkte sind die Unternehmer zur Anwendung der allernmodernsten technischen Verfahren und damit *zwecks weiterer steter Steigerung der organischen Zusammensetzung des Kapitals* zu einem vorzeitigen, den Anforderungen des moralischen Verschleißes entsprechenden Austausch ihrer Produktionsmittel gezwungen, selbst wenn der physikalische Verschleiß einen solchen noch nicht erforderlich gemacht hätte.) Als Folge dieser *zwangsläufigen* und *notwendigen* Vorgänge, die im wesentlichen darin bestehen, daß die Entwicklung der Produktionskräfte den Einsatz stets besserer und wirkungsvollerer Produktionsmittel bedingt, nimmt sowohl die Höhe als auch die wirtschaftliche Bedeutung des *fixen Kapitals ständig* zu. Die bereits verbrauchten fixen Kapitalien werden erneuert, und zu Erneuerungen entschließen sich selbst jene Kapitalisten, deren Maschinen zwar *noch nicht* veraltet sind, die aber den allgemeinen Aufschwung mit *Hilfe eines besseren Maschinenparks* zu nutzen wünschen.

Die Kulmination des Aufschwunges kennzeichnen der hohe Zinsfuß und der teure Kredit, und da niemand auf die Erneuerung zu verzichten geneigt ist, forciert jedermann den Absatz seiner Produkte. Inzwischen tritt das Mißverhältnis zwischen den einzelnen Produktionszweigen bereits deutlich zutage, die auf Grund der hohen Preise berechneten hohen Profite entsprechen dem Durchschnittsprofit nicht mehr, der Kredit wird eingeeengt oder versiegt zur Gänze, der Absatz stockt und die Krise bricht aus.

Der Hochkonjunktur folgt die Depression, die so lange anhält, bis sich die angesammelten Widersprüche allmählich ausgeglichen haben.

Der *Umschlag des fixen Kapitals* gibt mithin eine Erklärung *bloß* dafür, warum sich die gewaltsame Lösung der Widersprüche der kapitalistischen Produktionsweise in regelmäßigen Zeitabständen wiederholt, *sie erklärt also nicht die Ursachen der Krisen, sondern bloß deren periodischen Eigenheit*. Der Marxismus mißt aus diesem Grunde jenen Gegenargumenten keine Bedeutung

bei, die da etwa behaupten, die Kapitalisten erneuerten ihr fixes Kapital nicht zur gleichen Zeit, in den einzelnen Industriezweigen sei auch die Bedeutung des fixen Kapitals verschieden, oder die allenfalls darauf verweisen, daß für die einzelnen Teile des fixen Kapitals mit unterschiedlichen Umschlagzeiten zu rechnen sei.

Der bekannte *bürgerliche* Volkswirt J. SCHUMPETER, stellt in seinem an der Neige seines Lebens erschienenen Buch klar und eindeutig die Frage, ob der Kapitalismus bestehen bleiben kann, und beantwortet sie selbst mit einem kategorischen: »Ich glaube es nicht.«* Um der kühlen Nüchternheit seines Gedankenganges willen, die ihresgleichen sucht, lohnt es sich, hier auf diesen etwas näher einzugehen. Wohl schienen die zweifellos bedeutsamen Erfolge des Kapitalismus, so heißt es bei ihm an anderer Stelle, die Möglichkeit eines unter der Last seiner eigenen wirtschaftlichen Mängel eintretenden Zusammenbruches auszuschließen, dennoch bestehe aber die Gefahr, daß es eben diese Erfolge sein würden, die die gesellschaftlichen Einrichtungen, auf die er sich stütze, unterminierten, daß mithin »unabwendbar« eine Situation eintreten müsse, in der sein Fortbestand unmöglich sei. Diese Entwicklung weise eindringlich auf das Erscheinen des Sozialismus als des voraussichtlichen Erben hin.

Seine Schlußfolgerungen, so setzt SCHUMPETER fort, unterscheiden sich — so abweichend seine Argumente und Beweisgründe auch sein mögen —, in nichts von jenen der meisten sozialistischen Autoren und besonders auch nicht von jenen der Marxisten. Weil jemand all dies erkenne, müsse er noch kein Sozialist sein. Mache jemand das Eintreffen eines bestimmten künftigen Ereignisses wahrscheinlich, so bedeute diese Prophezeiung noch nicht, daß er dieses Ereignis auch tatsächlich herbeisehne. Erkenne ein Arzt das bevorstehende Ende eines Kranken, so heiße dies keineswegs, daß er seinen Abgang auch tatsächlich wünsche. Das Kommen des Sozialismus könne auch jemand voraussagen, der ihn hasse oder ihm bloß mit nüchternem, kühlem Urteil entgegengehe.

Die Kräfte, auf die auch SCHUMPETER verweist, und die letzten Endes den Sturz des Kapitalismus zur Folge haben werden, hängen mit unserer, mit der Zeit der großen Umwälzungen, und innerhalb dieser mit den ins Wanken geratenen moralischen und materiellen Grundlagen des Kapitalismus zusammen.

Jene Länder, die die Politik der kolonialen Unterdrückung betreiben, nennen sich »die freie Welt«. Für den logisch denkenden Menschen ist dieser Standpunkt *moralisch* selbst dann unhaltbar, wenn er zufällig kein ideologischer Gegner des Kapitalismus ist.

* J. Schumpeter: »Capitalism, Socialism and Democracy«, London, 1947, S. 61.

Die *materiellen* Fundamente des Kapitalismus werden in erster Linie durch einen einheitlichen, und mächtigen neuen Markt, den *sozialistischen Weltmarkt*, und durch das Erscheinen der *Wissenschaft als neue produktive Kraft* erschüttert.

Die organisierte Kraft des sozialistischen Weltmarktes, allem voran die stürmische Entwicklung sowie der friedliche Wettbewerb der Sowjetunion und Chinas, wird die kapitalistische Welt in wenigen Jahrzehnten vor neue, bisher ungeahnte Probleme stellen.

Das Auftreten der Wissenschaft als produktive Kraft (Atomenergie, Automation, usw.) beschleunigt notwendigerweise die großzügige Ausweitung der Produktion, eine Entwicklung, die gewaltige Impulse zur Ausbildung einer organisierten planmäßigen Produktion und zur Schaffung großer Wirtschaftseinheiten — Absatzgebiete — gibt.

Die planlose Produktion im Kapitalismus, die Widersprüche, Reibungen und der Wettbewerb zwischen den kapitalistischen Ländern sind kaum danach angetan, die Erfüllung dieser Voraussetzungen zu fördern.

Schließlich nähern wir uns, dank dem wissenschaftlichen und technischen Fortschritt, mehr und mehr jenem Zeitalter, das wir die »*Welt ohne Krieg*« nennen könnten, in dem sich die Meinungsverschiedenheiten nicht mehr mit den Waffen bereinigen lassen, weil es in einem mit den Kampfmitteln der modernen Technik ausgefochtenen Krieg keine Sieger mehr geben würde, und weil die Schrecken und Verwüstungen eines Krieges auch jenen nicht erspart blieben, die ihn vom Zaune brechen würden.

In dieser kommenden Welt werden sich auch die jetzigen Voraussetzungen für die Bewegung der Wirtschaftszyklen von Grund auf verändern.

F. Prof. of economics Dr. J. KLÁR Budapest, XI., Műegyetem Rakpart 3.

CB and LB Telephone
Apparatus

CB and LB Switchboards

Automatic Telephone
Exchanges

Repeater Station
Equipments

Multichannel Carrier
Equipments

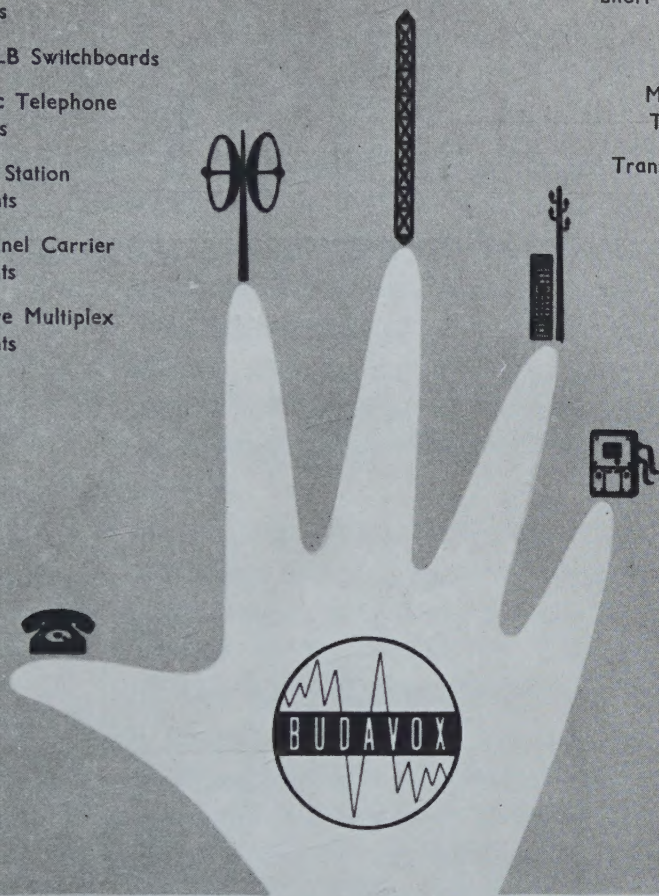
Microwave Multiplex
Equipments

Short-wave and Medium-
wave Broadcasting
Transmitters

Mobile and Portable
Transmitterreceivers

Transmission Measuring
Instruments

High Frequency
Generators



BUDAVOX

Budapest Telecommunication Company

Budapest VII. Tanács krt. 3/a Telephone: 426-549

Letters: Budapest 62 P. O. B. 267

Cables: Budavox Budapest Telex: 672



BUDAPEST

A kiadásért felel Bernát György az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1959. VI. 29. — Terjedelem: 12,25 (A/5) ív, 26 ábra

1959/49254 — Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A Budapesti Műszaki Egyetem Periodica Polytechnica címen idegen nyelvű tudományos folyóiratot indított. A folyóirat három sorozatban — vegyeszeti, villamossági, valamint gépész- és általános mérnöki sorozatban — jelenik meg, évente négyszer, sorozatonként egy-egy kötetben. Az egyes kötetek terjedelme 14—18 iv.

A Periodica Polytechnicában megjelenő tanulmányok szerzői az Egyetem tanári karából és tudományos dolgozóiból kerülnek ki. Főszerkesztő Dr. Csűrös Zoltán egyetemi tanár, akadémikus.

A folyóirat előfizetési ára sorozatonként és kötetenként 60,— Ft. Megrendelhető az Akadémiai Kiadónál (Budapest 62, Postafiók 440. NB. egyszámlaszám: 05-915-111-44), a külföld számára pedig a Kultúra Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Bp. 62, Postafiók 149. NB. egyszámlaszám: 43-790-057-181), illetve a vállalat külföldi képviselőinél és bizományosainál.

INDEX

BÁRÁNY, N.: Considerations Regarding the Possible Use of Some Optical Elements	183
FODOR, G.: The Interpretation of Characteristics and of Funda- mental Equations of the Electromagnetic Field	197
BAJCSAY, P.: Anwendung der Matrizenrechnung zur Lösung gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten	217
KARSA, B. E. F.: Some Questions on Reactive Power and Re- active Consumption	233
FELDMANN, L.: On Linear Difference Equations with Con- stant Coefficients	247
ELEK, T.: Über die weltanschaulichen Fragen der Physik der Gegenwart	259
KLÁR, J.: Krise oder Konjunkturzyklen	275